

Methoden zur Stabilitätsuntersuchung bei abstrakten Differentialgleichungen

DISSERTATION

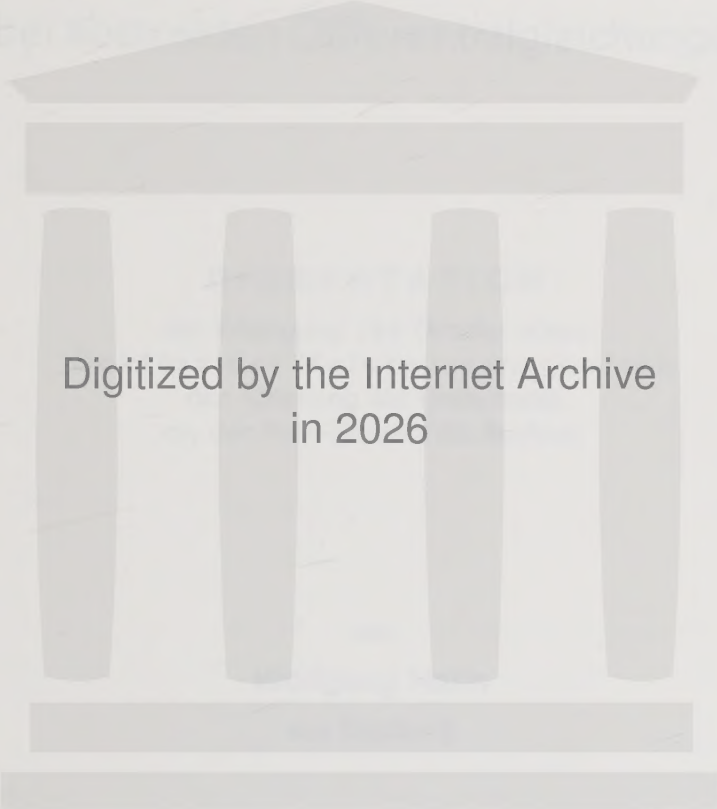
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Wolfgang Hahn
aus Duisburg

Bochum 1975

1976



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Methoden zur Stabilitätsuntersuchung bei abstrakten Differentialgleichungen

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Wolfgang Hahn

aus Duisburg

Bochum 1975



Dissertation eingereicht am 15.10.1975

Tag der mündlichen Prüfung: 6. 1.1976

Dekan: Prof. Dr. Herbert Amann

Referent: Prof. Dr. Rolf Reißig

Korreferenten: Prof. Dr. Wolf von Wahl

Prof. Dr. Wolfgang Hahn (TH Graz)

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
<u>KAPITEL O</u> Einleitung	1
<u>KAPITEL I</u> Die direkte Methode	11
§ 1 Vergleichssätze	12
§ 2 Beschränktheit, Stabilität und Instabilität	28
§ 3 Die Differentialgleichung $\dot{u} = Au + F(t, u)$	51
<u>KAPITEL II</u> Lineare Differentialgleichungen mit Dauerstörungen	72
§ 4 Stark stetige Halbgruppen	75
§ 5 Die lineare, inhomogene Differential- gleichung $\dot{u} = Au + p(t)$	82
§ 6 Lineare Gleichungen mit nicht- linearen Dauerstörungen	103
§ 7 Stabilität und Instabilität	136
§ 8 Ein einfaches Beispiel	142
<u>KAPITEL III</u> Anwendungen	152
§ 9 Wärmeleitungsprobleme	152
§ 10 Die Navier-Stokes-Gleichungen	177
§ 11 Die verallgemeinerte Wellengleichung	182
Literaturverzeichnis	188

Kapitel 0 Einleitung

In den letzten Jahrzehnten wurde die Stabilitätstheorie ein wichtiges Gebiet innerhalb der Theorie der Differentialgleichungen. Sie wurde im Jahre 1893 durch Arbeiten von Ljapunov ([29], [30]) begründet. Grob gesagt bedeutet "Stabilität" eines Systems bezüglich einer fest vorgegebenen Lösung, daß für hinreichend kleine Anfangsstörungen die Lösungen "nahe" bei der vorgegebenen Lösung bleiben. Dies ist der Stabilitätsbegriff im Sinne von Ljapunov, den wir in dieser Arbeit benutzen wollen.

Grundsätzlich lassen sich zwei Methoden der Stabilitätsuntersuchung unterscheiden. Die erste Methode benutzt die exakten Lösungen oder Darstellungen der Lösungen, um deren Verhalten zu beschreiben. Die zweite oder auch direkte Methode von Ljapunov ermöglicht es dagegen, ohne Kenntnis der Lösungen auf das Stabilitätsverhalten des Systems zu schließen. Dies ist offensichtlich ein großer Vorteil gegenüber der ersten Methode. Jedoch ist der Nachteil der direkten Methode schon beim einfachsten Stabilitätssatz für ein autonomes System von gewöhnlichen Differentialgleichungen $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x})$ ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(0) = 0$) sichtbar. Vereinfacht gesagt, garantiert die Existenz einer positiv-definiten (hinreichend glatten) Funktion $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, für die stets $(\text{grad } V(\underline{x}), f(\underline{x})) \leq 0$ gilt,

die Stabilität des Systems bezüglich der trivialen Lösung $\underline{x} \equiv 0$. Für die Konstruktion der Funktion V , die auch als Ljapunovsche Funktion bezeichnet wird, liegen jedoch kaum Anhaltspunkte vor. Trotz dieser Schwierigkeit ist es gelungen, ein weites Feld von Anwendungen der Ljapunov-Theorie zu erschließen. Eine umfassende Darstellung der Theorie für gewöhnliche Differentialgleichungen und der Anwendungen ist in dem Buch von Hahn [17] enthalten.

Es lag nahe, die für gewöhnliche Differentialgleichungen entwickelte Theorie auch für andere Arten von Differentialgleichungen nutzbar zu machen. Für partielle Differentialgleichungen wurden Stabilitätsuntersuchungen wohl grundlegend von Zubov [45] durchgeführt. Auch bei Eckhaus [12] sind Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen zu finden. Wegen weiterer, mit Hilfe der direkten Methode gewonnener Aussagen, verweisen wir auf das Buch von Lakshmikantham und Leela [28]. Es enthält ebenfalls Stabilitätsbetrachtungen für Funktional-Differentialgleichungen. Daneben gibt es eine Vielzahl von Arbeiten, die das Stabilitätsproblem für spezielle partielle Differentialgleichungen, die für Anwendungen interessant sind, untersuchen.

Da sich bekanntlich gewisse Typen von partiellen Differentialgleichungen als Operator-Differentialgleichungen

in geeigneten Funktionen-Räumen auffassen lassen, ist es natürlich, auch für solche Gleichungen Stabilitätsbetrachtungen anzustellen. Mit diesen und den eng verbundenen Problemen der Beschränktheit und Instabilität werden wir uns in der vorliegenden Arbeit beschäftigen.

Wir betrachten abstrakte Differentialgleichungen der Form

$$\dot{u} = f(t, u). \quad (0.1)$$

Dabei bildet f die Menge $[t_0, \infty) \times G$ (t_0 fest) in den reellen normierten Raum X ab, und G ist eine Teilmenge von X . Ferner wird mit $\dot{u}$ die starke Ableitung $\frac{du}{dt}$ abgekürzt.

Von einer Lösung der Gleichung (0.1) verlangen wir, daß sie fast überall stark differenzierbar ist und der Differentialgleichung genügt. Weiter garantiert unser Lösungsbegriff (s. Definition 1.2), daß die reellwertige Funktion $\|u(t)\|$ für eine Lösung u fast überall eine Ableitung besitzt. Es ist nicht möglich, ohne weitere Voraussetzungen die Existenz von Lösungen der Gleichung (0.1) zu beweisen. Dieudonné zeigte nämlich, daß selbst unter der Annahme, daß f stetig ist, in einem unendlich-dimensionalen Banach-Raum der Satz von Peano nicht gilt [9]. Wir setzen deshalb die Existenz von Lösungen der Gleichung (0.1) voraus.

Erstes Ziel der Arbeit ist es, das Verhalten dieser Lösungen zu beschreiben. Da wir die Ergebnisse auf partielle Differentialgleichungen anwenden wollen, sind Stetigkeitsvoraussetzungen an f nicht sinnvoll. Jedoch muß f natürlich zusätzliche Bedingungen erfüllen, die im wesentlichen mit Hilfe eines Semi-Skalarproduktes für den normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ formuliert werden. Dabei handelt es sich um eine Abbildung von $X \times X$ in $\mathbb{R}$, die außer der Symmetrie alle Eigenschaften eines Skalarproduktes besitzt. Das Semi-Skalarprodukt wird durch eckige Klammern $[\cdot, \cdot]$ symbolisiert und ist über die Beziehung $[x, x] = \|x\|^2$ eng mit der vorgegebenen Norm in X verbunden, jedoch i.a. nicht eindeutig bestimmt. Ferner benötigen wir eine reellwertige Funktion g , die auf einer Teilmenge von $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ definiert ist, und für die

$$[f(t, u), u] \leq g(t, \|u\|^2) \quad (0.2)$$

mit $u \in G$ gilt. Ohne hier auf die exakten Voraussetzungen einzugehen, werden wir dann beweisen:

Ist x eine Lösung der skalaren Differentialgleichung $x' = g(t, x)$ und u eine Lösung der Gleichung (0.1) mit $\|u(t_0)\|^2 \leq x(t_0)$, so folgt für $t \geq t_0$

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t) \quad (0.3).$$

Die Methode, mit Hilfe von Vergleichsdifferentialgleichungen das Verhalten von Lösungen zu beurteilen, wurde mit Erfolg für viele Arten von Differentialgleichungen

(gewöhnliche, partielle und Funktional-Differentialgleichungen) angewandt (s. Walter [42], Lakshmikantham-Leela [27],[28]). Im Vergleich damit ist die Anzahl der Arbeiten, die sich mit abstrakten Differentialgleichungen beschäftigen, klein. In dem Buch von Ladas und Lakshmikantham [25] sind einige Stabilitätsaussagen zusammengestellt, die mit Hilfe von verallgemeinerten Ljapunov-Funktionen und Vergleichsdifferentialgleichungen für rechte Seiten der Form $f(t,u) = A(t)u + F(t,u)$ ($A(t)$ linear, F stetig) gewonnen werden. In diesem Zusammenhang ist auch die Arbeit von Pao [36] zu erwähnen. Er beweist mit Hilfe des Semi-Skalarproduktes und der Vergleichsdifferentialgleichung $y' = k(t)y$ die asymptotische Stabilität der Lösung $u \equiv 0$ (vgl. Satz 3.1 und Bemerkung 3.5). Allerdings benutzt er nicht explizit die Methode der Vergleichsdifferentialgleichung, sondern löst eine Differentialungleichung für $\|u(t)\|^2$.

Der allgemeine Fall (O.1) wird in einer Arbeit von Redheffer und Walter [43] aus dem Jahre 1974 untersucht. Sie erzielen mit Hilfe von konvexen Funktionalen und Vergleichsdifferentialgleichungen ein Ergebnis der Art (O.3). Es werden jedoch keine Abschätzungen mittels des Semi-Skalarproduktes benutzt. Auch fehlen Anwendungen auf konkrete Probleme. Abschließend ist zu sagen, daß die oben angegebene Aussage ((O.2) und (O.3)) bisher unbekannt war.

In den ersten Sätzen von § 1 (Satz 1.7 - Satz 1.9) geben wir verschiedene Variationen dieser Aussage an, indem wir die Gültigkeit der Abschätzung (0.2) bezüglich t und u einschränken. Es liegt nun nahe, mit der dabei benutzten Methode auch Abschätzung für die Lösungen von Gleichung (0.1) nach unten zu gewinnen. Tatsächlich zieht eine Bedingung der Form

$$[f(t,u),u] \geq g(t,\|u\|^2) \quad (0.4)$$

für eine Lösung u die Ungleichung

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t) \quad (0.5)$$

nach sich, falls $\|u(t_0)\|^2 \geq x(t_0)$ ist. Mit diesen ebenfalls nicht bekannten Abschätzungen beschäftigen wir uns am Ende von § 1.

Die Abschätzung der Lösung nach oben und nach unten benutzen wir im § 2, um Stabilitäts- und Beschränktheitsprobleme zu diskutieren. Dabei zeigt sich, daß wir diese Probleme nur für die im Vergleich zu (0.1) einfache, skalare Differentialgleichung untersuchen müssen, um zu Ergebnissen für das allgemeine Problem zu gelangen. Naturgemäß sind die unter so allgemeinen Voraussetzungen gewonnenen Aussagen ziemlich grob. Wir erhalten jedoch auf zwei verschiedenen Wegen feinere Aussagen. Zuerst betrachten wir spezielle Funktionen g , indem wir die skalare Differentialgleichung entweder als autonom oder als Gleichung mit getrennten Variablen voraussetzen (s. § 2).

Der andere Weg nutzt spezielle Bedingungen für die Gestalt von f aus. Wir fordern, daß $f(t,u) = Au + F(t,u)$ (A nicht notwendig linear) gilt (s. § 3). Die so gewonnenen Resultate über die Stabilität und Beschränktheit von Lösungen sind bis auf Teilaspekte der Sätze 3.1 und 3.12 unbekannt. In vielen Aussagen von § 3 wird die Voraussetzung

$$\|Au, u\| \leq \alpha \|u\|^2 \quad (0.6)$$

benutzt. Ist A linear und besitzt einen dichten Definitionsbereich im Banachraum X , so ist diese Bedingung äquivalent damit, daß der Operator $A - \alpha I$ eine stark stetige, kontrahierende, lineare Halbgruppe erzeugt (s. Lumer-Phillips [31]). Unter welchen Umständen die Bedingung (0.6) für einen nicht-linearen Operator A realisiert werden kann, zeigen Ergebnisse von Pao ([34], [35]), die teilweise auf Kato [21] zurückgehen. Pao verweist in diesen Arbeiten auf den engen Zusammenhang der Bedingung (0.6) mit aus der Ljapunov'schen Theorie bekannten Tatsachen. Auf diesen Aspekt gehen wir jedoch nicht ein.

Zum Abschluß von Kapitel I behandeln wir kurz den Fall, daß der Operator A von t abhängig ist.

Da alle in diesem Kapitel erzielten Resultate ohne Kenntnis der Lösungen bewiesen werden, haben wir es, in Anlehnung an die Ljapunov-Theorie, mit der Überschrift "die direkte Methode" versehen. Die bewiesenen Sätze haben den

Vorteil, daß die Voraussetzungen leicht nachprüfbar sind. Dies wird sich bei der Anwendung der direkten Methode in Kapitel III erweisen.

Im Gegensatz zur direkten Methode nutzen wir in Kapitel II explizit die Lösungen der Gleichung aus, um den gleichen Problemkreis (Stabilität und Beschränktheit) zu behandeln. Wir beschäftigen uns mit den folgenden Typen von abstrakten Differentialgleichungen im Banachraum X :

$$\dot{u} = Au + p(t) \quad (0.7)$$

$$\dot{u} = Au + f(t, u) \quad (0.8).$$

Dabei wird gefordert, daß A linear ist und eine stark stetige, lineare Halbgruppe erzeugt. An p und f werden Stetigkeitsvoraussetzungen gestellt. Über diese Gleichungstypen kann man sich anhand des Buches von Krein [24] einen Überblick verschaffen. Unter Stetigkeitsvoraussetzungen für A werden die Gleichungen bei Dalecki und Krein [8] behandelt.

Im § 5 untersuchen wir zunächst die Gleichung (0.7). Nach den bekannten Sätzen über die Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung von Lösungen des Anfangswertproblems für die Gleichung (0.7) gehen wir ausführlich auf beschränkte Lösungen ein. Die in diesem Zusammenhang gewonnenen Resultate waren bisher nicht bekannt. In Anlehnung an einen bekannten Satz von Massera-Schäfer [32] geben wir hinreichende Bedingungen an, die die Existenz genau einer be-

schränkten Lösung der Gleichung (0.7) sichern. Dies ist wohl der bemerkenswerteste Satz dieses Paragraphen.

Um das Verhalten der Lösungen der Gleichung (0.8) zu untersuchen, ist die bekannte Tatsache, daß diese einer Volterraschen Integralgleichung genügen, ein wesentliches Hilfsmittel. Das Existenz-Problem für die Gleichung (0.8) streifen wir nur kurz. In einem einfachen Fall beweisen wir jedoch mittels eines modifizierten Verfahrens der sukzessiven Approximation die Existenz von Lösungen (Satz 6.7).

Im restlichen Teil von § 6 befassen wir uns mit den beschränkten Lösungen von Gleichung (0.8). Zu diesem Zweck leiten wir Aussagen ab, die die Lösungen der Gleichungen (0.7) und (0.8) vergleichen. Die mit dieser Methode gewonnenen Resultate sind im Satz 6.15 zusammengefaßt. Für gewöhnliche Differentialgleichungen wurden analoge Ergebnisse von Brauer [3] und Coppel [6] bewiesen.

Nachdem wir im § 7 hinreichende Bedingungen für die Stabilität und Instabilität des Systems (0.8) angegeben haben, behandeln wir im § 8 ein einfaches Beispiel. Wegen weiterer Anwendungsmöglichkeiten der Gleichungen (0.7) und (0.8) verweisen wir auf die Arbeiten von Buis, Vogt und Eisen ([4], [41]) und auf Carroll [5].

Im Kapitel III wenden wir vor allem die im ersten Abschnitt entwickelte direkte Methode auf partielle Differentialgleichungen an. Neben der allgemeinen Wärmeleitungs- und Wellengleichung (§ 9, § 11) werden im § 10 die Navier-Stokes'schen Gleichungen untersucht. Die Einordnung in die bekannte Literatur wird in jedem der Paragraphen gesondert vorgenommen.

Wir sind in dieser Arbeit nicht auf Gleichungen höherer Ordnung eingegangen. Zu diesem Problem wollen wir zwei Bemerkungen machen:

Unter gewissen Voraussetzungen ist es möglich, abstrakte Gleichungen höherer Ordnung auf die Form (0.1) zurückzuführen (s. z.B. Fattorini [13], [14]; Goldstein [16]).

Bei konkreten Anwendungsproblemen kann man das in den meisten Fällen durch Substitution der höheren Ableitungen erreichen. Dies zeigt sich auch am Beispiel der verallgemeinerten Wellengleichung (§ 11).

Herrn Prof. Dr. R. Reißig möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und viele wertvolle Hinweise danken.

Kapitel I Die direkte Methode

Ziel dieses Kapitels ist es, das qualitative Verhalten von Lösungen der abstrakten Differentialgleichung

$$\dot{u} = f(t, u) \quad (1.0.1)$$

zu beschreiben. Dabei ist G eine Teilmenge des normierten Raumes $(X, \|\cdot\|)$ und f eine Abbildung von $\{t_0, \infty\} \times G$ in X mit $t_0 \geq 0$. Auf Grund von Abschätzungen für die Abbildung f wollen wir gewöhnliche, skalare Differentialgleichungen angeben, deren Lösungen das qualitative Verhalten der Lösungen von (1.0.1) exakt simulieren. Wesentlich ist dabei, daß alle Aussagen ohne Kenntnis der Lösungen gewonnen werden. Im § 1 zeigen wir zunächst, daß sich mit dieser Methode Abschätzungen der Lösungen nach oben und nach unten finden lassen. Dies nutzen wir im § 2 aus, um Stabilitäts- und Beschränktheitsprobleme zu diskutieren. Der letzte Paragraph behandelt diesen Problemkreis für den Fall, daß f die spezielle Gestalt

$$f(t, u) = Au + F(t, u)$$

besitzt.

§ 1 Vergleichssätze

Grundlegend für unsere Überlegungen ist der folgende bekannte Satz aus der Theorie der Differentialungleichungen, den wir ohne Beweis angeben. Dieser findet sich etwa bei Walter [42] oder in dem Buch von Lakshmikantham-Leela [27]. Es handelt sich um einen Vergleichssatz, der sich auf absolut stetige, fast überall differenzierbare Funktionen bezieht. Solche Funktionen werden auch als Lösungen im Sinne von Caratheodory bezeichnet.

Satz 1.1

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge und

$$g : A \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Abbildung mit der Eigenschaft:

- i) Für festes t ist g in u stetig; für festes u ist g bezgl. t meßbar.

Ferner sei $(t_0, \varphi_0) \in A$ und $a \in \mathbb{R}$, und zu g existiere eine integrierbare Funktion M mit

$$ii) |g(t, u)| \leq M(t)$$

für alle $(t, \varphi) \in A$ mit $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Ferner sei $m(t)$ auf $[t_0, t_0 + a]$ maximale Lösung (im Sinne von Caratheodory) des Problems:

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = \varphi_0$$

und φ eine absolut stetige Funktion mit

$$\varphi'(t) \leq g(t, \varphi(t)) \quad \varphi(t_0) \leq \varphi_0$$

für fast alle $t \in [t_0, t_0 + a]$.

Dann gilt für alle $t \in [t_0, t_0 + a]$ die Ungleichung:

$$\varphi(t) \leq m(t).$$

Man beachte, daß die Differentialungleichung, die nur fast überall gilt, eine Abschätzung für φ auf dem gesamten Intervall nach sich zieht.

Wir beschäftigen uns nun mit den Lösungen der abstrakten Differentialgleichung und definieren zunächst, was wir unter einer Lösung verstehen wollen.

Definition 1.2

Eine Abbildung $u: [t_0, \infty) \rightarrow G$ heißt Lösung der Gleichung

$$\dot{u} = f(t, u),$$

falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) u ist in $[t_0, \infty)$ fast überall stark differenzierbar und erfüllt die Differentialgleichung.
- ii) Die Abbildung

$$[t_0, \infty) \ni t \rightarrow \|u(t)\| \in \mathbb{R}_+$$

ist auf jedem Intervall der Form $[t_0, T]$ absolut stetig.

Nutzt man die Ungleichung

$$|\|u(t_1)\| - \|u(t_2)\|| \leq \|u(t_1) - u(t_2)\|$$

aus, so erkennt man, daß die absolute Stetigkeit von u auf dem Intervall $[t_0, T]$ die Bedingung ii) nach sich zieht.

Für die absolute Stetigkeit von u auf $[t_0, T]$ ist offenbar die Lipschitz-Stetigkeit von u auf diesem Intervall hinreichend. Weitere hinreichende Bedingungen für die absolute Stetigkeit von u sind im folgenden Lemma zusammengestellt.

Lemma 1.3

Die Abbildung $u: [t_0, \infty) \rightarrow X$ sei stetig und genüge einer der folgenden Bedingungen:

- a) u ist stetig differenzierbar,
- b) u ist f.ü. differenzierbar und die Ableitung $\dot{u}$ ist auf jedem Intervall $[t_0, T]$ mit $T > t_0$ beschränkt.

Dann folgt:

u ist auf jedem Intervall $[t_0, T]$ absolut stetig.

Beweis:

Sei das Intervall $[t_0, T]$ vorgegeben und $t_1, t_2 \in [t_0, T]$.

Dann gilt nach dem Mittelwertsatz (s. Dieudonné [10]):

$$\|u(t_1) - u(t_2)\| \leq |t_1 - t_2| \sup_{s \in [t_1, t_2]} \|\dot{u}(s)\|,$$

wobei o.B.d.A. $t_1 < t_2$ angenommen wird. Im Fall a) und b) existiert das Supremum und die absolute Stetigkeit folgt unmittelbar. —

Unter die Definition 1.2 fallen damit die starken Lösungen (vgl. u.a. Ladas-Lakshmikantham [25] S.57) und die von Pao ([35],[36]) benutzten Lösungsbegriffe. Bekanntlich sind reellwertige absolut stetige Funktionen f.ü. differenzierbar. Um die Ableitung von $\|u(t)\|$ zu bestimmen, benötigen wir den Begriff des Semi-Skalarproduktes, der von Lumer und Phillips [31] eingeführt wurde (s. auch Yoshida [44]).

Definition 1.4

Sei $[\cdot, \cdot] : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Abbildung, für die bei festem $y \in X$ die Abbildung

$$X \ni x \rightarrow [x, y]$$

linear ist, und die den Bedingungen

$$i) \quad [x, y] \leq \|x\| \|y\|$$

$$ii) \quad [x, x] = \|x\|^2$$

genügt. Dann heißt $[\cdot, \cdot]$ Semi-Skalarprodukt für den normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$.

Wir führen das folgende Lemma ohne Beweis an (s. Yoshida [44]).

Lemma 1.5

Für jeden normierten Raum X existiert ein Semi-Skalarprodukt. Der Beweis beruht auf einer einfachen Anwendung des Satzes von Hahn-Banach.

Satz 1.6 (Kato [21])

Die Abbildung $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ sei fast überall differenzierbar und genüge der Bedingung ii) aus Definition 1.2. Dann gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}_+$ die Gleichung

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) = 2 [\dot{u}(t), u(t)].$$

Beweis:

Wegen der Linearität des Semi-Skalarproduktes und der Abschätzung i) und ii) von Definition 1.4 folgt für $t \in \mathbb{R}_+$ und $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [u(t+h) - u(t), u(t)] &= [u(t+h), u(t)] - \|u(t)\|^2 \\ &\leq \|u(t)\| (\|u(t+h)\| - \|u(t)\|). \end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten der Ungleichung durch $h > 0$ (bzw. $h < 0$) und betrachtet den Grenzwert für $h \rightarrow 0 +$ (bzw. $h \rightarrow 0 -$), so folgt, da u und $\|u(t)\|$ f.ü. differenzierbar sind:

$$\begin{aligned} [\dot{u}(t), u(t)] &= \|u(t)\| \frac{d}{dt} \|u(t)\| \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2). \end{aligned}$$

Die nächsten Sätze zeigen, unter welchen Voraussetzungen sich die Lösungen der abstrakten Differentialgleichung nach oben durch die Lösung von skalaren Differentialgleichungen abschätzen lassen. Grundlegend ist der folgende

Satz 1.7

Seien T und α positive reelle Zahlen und

$$g: [t_0, T] \times [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung. Für $x_0 \in [0, \alpha]$ sei die absolut stetige Funktion x maximale Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

im Intervall $[t_0, T]$ mit $\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)| < \alpha$.

Die Abbildung

$$f: [t_0, \infty) \times G \rightarrow X$$

genüge für $t \in [t_0, T]$ und $u \in G$ mit $\|u\|^2 < \alpha$ der Bedingung:

$$2 [f(t, u), u] \leq g(t, \|u\|^2). \quad (1.7.1)$$

Ist dann u eine Lösung der Gleichung (1.0.1)

$$\dot{u} = f(t, u)$$

mit $\|u(t_0)\|^2 \leq x_0$, so folgt für $t_0 \leq t \leq T$:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t).$$

Beweis:

Wir behaupten zunächst, daß für $t_0 \leq t \leq T$ stets $\|u(t)\|^2 < \alpha$ gilt. Andernfalls existiert eine Zahl $t_0 < t_1 < T$ mit

$$\|u(t)\|^2 < \alpha$$

für $t_0 \leq t < t_1$ und $\|u(t_1)\|^2 = \alpha$.

Setze $\varphi(t) := \|u(t)\|^2$. Nach Satz 1.6 ist φ im Intervall $[t_0, t_1]$ f.ü. differenzierbar, und es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= 2 [\dot{u}(t), u(t)] \\ &= 2 [f(t, u(t)), u(t)].\end{aligned}$$

Da für $t < t_1$ die Abschätzung $\varphi(t) < \alpha$ gilt, folgt nach Voraussetzung für fast alle $t \in [t_0, t_1]$:

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\leq g(t, \|u(t)\|^2) \\ &= g(t, \varphi(t)).\end{aligned}$$

Mit A bezeichnen wir die offene Menge

$$(-1, T+1) \times (-1, \alpha).$$

Dann existiert eine auf A definierte Funktion $\tilde{g}$, die auf der Menge $[t_0, T] \times [0, \alpha)$ mit g übereinstimmt und auf $\bar{A}$ stetig ist. Damit erfüllt $\tilde{g}$ auf A die Bedingung i) und für $t \in [t_0, t_1]$ die Bedingung ii) von Satz 1.1.

Weiter ist x Maximal-Lösung von

$$x' = \tilde{g}(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

auf $[t_0, t_1]$ und

$$\varphi' \leq \tilde{g}(t, \varphi) \quad \varphi(t_0) = \|u(t_0)\|^2 \leq x_0$$

für fast alle $t \in [t_0, t_1]$. Daraus folgt nach Satz 1.1

für alle $t \in [t_0, t_1]$

$$\varphi(t) \leq x(t).$$

Setzen wir nun $t = t_1$, so erhalten wir mit

$$\alpha = \varphi(t_1) \leq x(t_1) \leq \sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)| < \alpha$$

einen Widerspruch.

Somit ist $\varphi(t) = \|u(t)\|^2 < \alpha$ für alle $t \in [t_0, T]$ und genügt für fast alle $t \in [t_0, T]$ der Differentialungleichung

$$\varphi'(t) \leq g(t, \varphi(t)).$$

Daraus ergibt sich aber, wie gezeigt wurde:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t)$$

für alle $t \in [t_0, T]$. —

Der folgende Satz zeigt, daß sich unter leichter Modifizierung der Voraussetzung die Abschätzung für $\|u(t)\|^2$ für alle $t \geq t_0$ gewinnen läßt. Wir führen noch folgende Bezeichnung ein:

$$I := \{ t \in \mathbb{R} \mid t \geq t_0 \}.$$

Satz 1.8

Die reellwertige Funktion

$$g : I \times [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$$

sei stetig. Sei $x_0 \in [0, \alpha]$, und das Anfangswertproblem

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0; \quad t \geq t_0$$

sei eindeutig lösbar. Für diese Lösung gelte stets:

$$|x(t)| < \alpha.$$

Die Abbildung f genüge für $t \geq t_0$ und $u \in G$ mit $\|u\|^2 < \alpha$ der Ungleichung (1.7.1). Dann gilt für jede Lösung der Gleichung (1.0.1) mit $\|u(t_0)\|^2 \leq x_0$ für $t \geq t_0$ die Abschätzung:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t).$$

Beweis:

Da die Lösung des skalaren Anfangswertproblems eindeutig bestimmt ist, ist x auf jedem Intervall der Form $[t_0, T]$ maximal. Ferner ist x auf jedem dieser Intervalle absolut stetig, und es gilt:

$$\sup_{t \in [t_0, T]} |x(t)| < \alpha.$$

Da g und f den Voraussetzungen von Satz 1.7 genügen, folgt somit für $t_0 \leq t \leq T$:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen, da $T \geq t_0$ beliebig gewählt werden kann. —

Eine Abschätzung der Lösung über dem gesamten Intervall I läßt sich auch dann gewinnen, falls man die Beschränktheit der Lösung der skalaren Differentialgleichung nicht fordert. In diesem Fall muß man die Gültigkeit der Abschätzung (1.7.1) für alle $t \in I$ und alle $u \in G$ voraussetzen.

Satz 1.9

Die Abbildung

$$g : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

sei stetig, und für $x_0 \in \mathbb{R}_+$ sei x die eindeutig bestimmte Lösung des Problems:

$$x' = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Für $u \in G$ und $t \geq t_0$ gelte die Ungleichung (1.7.1)

$$2 [f(t, u), u] \leq g(t, \|u\|^2).$$

Ist u eine Lösung der Gleichung (1.0.1) mit $\|u(t_0)\|^2 \leq x_0$,

dann gilt für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t).$$

Beweis:

Sei $T \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben und definiere:

$$R := \sup \{ |x(t)| \mid t_0 \leq t \leq T \}.$$

Wählt man $\alpha > R$, so ist x maximale Lösung des Anfangswertproblems im Intervall $[t_0, T]$ mit

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)| < \alpha.$$

Wenden wir jetzt Satz 1.7 an, so erhalten wir für

$t_0 \leq t \leq T$ die Abschätzung

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. —

Unser nächstes Ziel ist es, zu beweisen, daß sich für die Lösungen der abstrakten Differentialgleichung auch Abschätzungen nach unten gewinnen lassen. Dies wird sich bei Aussagen über die Instabilität als hilfreich erweisen. Als Vorbereitung dient das folgende Lemma, dessen Beweis trivial ist.

Lemma 1.10

- i) Sei g eine reellwertige, auf einer offenen Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$ definierte Funktion. Mit Hilfe von g und A definiere man die Menge

$$A' := \{ (t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid (t, -x) \in A \}$$

und die Funktion

$$\bar{g} : A' \ni (t, x) \mapsto -g(t, -x) \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

Genügt g bezüglich der Menge A und einem Intervall $[t_1, t_1 + a]$ den Bedingungen i) und ii) von Satz 1.1, so ist dies auch für $\bar{g}$ bezüglich A' und dem Intervall $[t_1, t_1 + a]$ richtig.

- ii) Für eine reellwertige Funktion g mit dem Definitionsbereich $[t_0, T] \times [0, \alpha]$ ($T > t_0$, $\alpha > 0$) definiere man die Funktion $\bar{g}$ wie in i).

Ferner sei $x_0 \in [0, \alpha]$. Dann gilt: x ist genau eine Lösung des Problems

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0; \quad t_0 \leq t \leq T,$$

falls für $y := -x$ die Beziehung

$$y' = \bar{g}(t, y), \quad y(t_0) = -x_0$$

erfüllt ist.

Mit Hilfe von Lemma 1.10 beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 1.11

Die Abbildung $f: I \times G \rightarrow X$ genüge für $t_0 \leq t \leq T$ und $u \in G$ der Abschätzung:

$$2 [f(t, u), u] \geq g(t, \|u\|^2) \quad (1.11.1).$$

Dabei sei g eine stetige Funktion mit

$$g: [t_0, T] \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Für $x_0 \geq 0$ sei x die eindeutig bestimmte Lösung des Problems

$$x' = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ist dann u eine Lösung der Gleichung (1.0.1) mit

$$\|u(t_0)\|^2 \geq x_0, \quad \text{so gilt für } t \in [t_0, T]:$$

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t).$$

Beweis:

Wir wählen $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha > \max \left\{ \sup_{t_0 \leq t \leq T} \|u(t)\|^2, \sup_{t_0 \leq t \leq T} x(t) \right\}.$$

Nach Satz 1.6 ist $\|u(t)\|^2$ im Intervall $[t_0, T]$ f.ü. differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) &= 2 [f(t, u(t)), u(t)] \\ &\geq g(t, \|u(t)\|^2). \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Einschränkung von g auf das Rechteck $[t_0, T] \times [0, \alpha]$ wiederum mit g , so folgt für $\bar{g}$ (s. Lemma 1.10 ii)) und die Funktion

$$\psi(t) := - \|u(t)\|^2 :$$

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= - \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) \leq - g(t, \|u(t)\|^2) \\ &= - g(t, -\psi(t)) \\ &= \bar{g}(t, \psi(t)). \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{g}$ auf dem Rechteck $[t_0, T] \times [-\alpha, 0]$ definiert.

Ferner gilt nach Lemma 1.10 ii) für $y := -x$ und

$$\begin{aligned} t_0 \leq t \leq T : \\ y' = \bar{g}(t, y) \quad y(t_0) = -x_0. \end{aligned}$$

Nach Satz 1.7 und Lemma 1.10 i) existiert eine Funktion $\bar{g}$, die den Bedingungen von Satz 1.1 genügt. Wegen der Ungleichung

$$\psi(t_0) = - \|u(t_0)\|^2 \leq -x_0 = y(t_0)$$

folgt dann gemäß Satz 1.1 für $t \in [t_0, T]$:

$$\psi(t) \leq y(t).$$

Dies ist aber äquivalent mit der Beziehung:

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t). \text{ ---}$$

Korollar 1.12

Die Abbildung f genüge für $t \geq t_0$ und $u \in G$ der Bedingung (1.11.1). Für $x_0 \geq 0$ sei x die eindeutig bestimmte Lösung des Problems

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0.$$

Dabei sei g eine stetige, reellwertige Funktion mit dem Definitionsbereich $I \times \mathbb{R}_+$. Ist u eine Lösung der Gleichung (1.0.1) mit $\|u(t_0)\|^2 \geq x_0$, so folgt für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t).$$

Zum Beweis weisen wir nur darauf hin, daß die Abschätzung (1.11.1) auf jedem Intervall der Form $[t_0, T]$ gilt.

Bemerkung 1.13

In Satz 1.11 ist es nicht notwendig, die eindeutige Lösbarkeit des skalaren Anfangswertproblems zu fordern. Die Aussage bleibt richtig, wenn x minimale Lösung des Anfangswertproblems ist.

Ähnlich wie bei den Abschätzungen der Lösung der abstrakten Differentialgleichung nach oben, lassen sich auch dann Aussagen über den Lösungsverlauf machen, wenn die Ungleichung (1.11.1)

$$2 [f(t, u), u] \geq g(t, \|u\|^2)$$

nur für $u \in G$ mit $\|u\|^2 > \alpha$ gilt. Fordern wir, daß die Lösung x der skalaren Gleichung (s. Satz 1.11 und Korollar 1.12) stets der Bedingung

$$x(t) > \alpha$$

genügt, so bleiben die Behauptungen weiter gültig.

Der letzte Satz dieses Paragraphen zeigt, daß das Gleichheitszeichen in der Formel (1.11.1) die exakte Beschreibung von $\|u(t)\|$ zuläßt.

Satz 1.14

Seien T und α positive reelle Zahlen und

$$g : [t_0, T] \times [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung. Für $x_0 \in [0, \alpha]$ sei x die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0.$$

Für x gelte: $\sup_{t_0 \leq t \leq T} |x(t)| < \alpha$.

Die Abbildung

$$f : I \times G \rightarrow X$$

genüge für $t \in [t_0, T]$ und $u \in G$ mit $\|u\|^2 < \alpha$ der Bedingung:

$$2 [f(t, u), u] = g(t, \|u\|^2).$$

Ist u eine Lösung der Gleichung (1.0.1) mit $\|u(t_0)\|^2 = x_0$, so gilt für $t_0 \leq t \leq T$ die Gleichung

$$\|u(t)\|^2 = x(t).$$

Beweis:

Zunächst folgt nach Satz 1.7 für $t_0 \leq t \leq T$

$$\|u(t)\|^2 = x(t).$$

Wegen $\|u(t)\|^2 \leq x(t) < \alpha$ gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\|u(t)\|^2) &= 2 [f(t, u(t)), u(t)] \\ &= g(t, \|u(t)\|^2). \end{aligned}$$

Aus $\|u(t_0)\|^2 = x_0$ und der eindeutigen Lösbarkeit der skalaren Differentialgleichung erhalten wir demnach:

$$\|u(t)\|^2 = x(t)$$

für $t_0 \leq t \leq T$. —

Das folgende Korollar ist eine einfache Folgerung aus Satz 1.9 und Korollar 1.12.

Korollar 1.15

Die reellwertige Funktion g mit dem Definitionsbereich $I \times \mathbb{R}_+$ sei stetig, und für $x_0 \geq 0$ sei das Problem

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0$$

eindeutig lösbar. Für $t \geq t_0$ und $u \in G$ gelte:

$$2 [f(t, u), u] = g(t, \|u\|^2) .$$

Ist u eine Lösung der Gleichung (1.0.1) mit $\|u(t_0)\|^2 = x_0$, so folgt für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\|^2 = x(t) .$$

§ 2 Beschränktheit, Stabilität und Instabilität

Wir haben im § 1 bewiesen, daß sich die Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{u} = f(t, u)$$

im Raum X unter einschränkenden Voraussetzungen durch Lösungen skalarer Differentialgleichungen abschätzen lassen.

Wir wollen diese Tatsache im ersten Teil von § 2 ausnutzen, um genauere Aussagen über das Lösungsverhalten zu gewinnen. Dabei soll insbesondere auf die Stabilität und Instabilität der Ruhelage eingegangen werden. Obwohl dies nicht immer notwendig ist, wollen wir annehmen, daß g die Menge $I \times \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}$ abbildet und stetig ist. Weiter setzen wir voraus, daß das Anfangswertproblem

$$(2.0.1) \quad x' = g(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}_+$$

zumindest für kleine x_0 genau eine Lösung besitzt. Der erste Satz zeigt, wann die Lösung des Anfangswertproblems

$$(2.0.2) \quad \dot{u} = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0 \in G$$

"stetig" von u_0 abhängt.

Satz 2.1

Für $t \geq 0$ und $u \in G$ mit $\|u\|^2 < \alpha$ gelte:

$$2 [f(t, u), u] \leq g(t, \|u\|^2).$$

Ferner sei $g(t, 0) \equiv 0$ und die Lösung x des AWP (2.0.1) hänge stetig vom Startwert x_0 ab.

Dann gilt:

Zu jedem Paar (ε, T) mit $\varepsilon > 0$ und $T > t_0$ existiert eine reelle Zahl $\delta(\varepsilon, T) > 0$, so daß aus $\|u_0\|^2 < \delta$ für $t_0 \leq t \leq T$ folgt:

$$\|u(t)\|^2 < \varepsilon.$$

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ und $T > t_0$ eine Zahl $\bar{\delta}(\varepsilon, T)$, so daß aus $0 \leq x_0 < \bar{\delta}(\varepsilon, T)$ folgt (s. Knobloch-Kappel [22])

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)| < \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon_0 := \alpha$ und $\delta_0 := \bar{\delta}(\varepsilon_0, T)$. Dann folgt aus Satz 1.7: Ist $u_0 \in G$ mit $\|u_0\|^2 =: x_0 < \delta_0$, so ist für $t_0 \leq t \leq T$

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t) < \alpha.$$

Sind nun ε und T beliebig vorgegeben, so bestimme

$$\delta(\varepsilon, T) := \min \{ \bar{\delta}(\varepsilon, T), \delta_0 \}.$$

Für $u_0 \in G$ mit $\|u_0\|^2 < \delta(\varepsilon, T)$ gilt dann:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t, \|u_0\|^2) < \varepsilon, \quad t \in [t_0, T].$$

Korollar 2.2

Ist $0 \in G$ und u Lösung des Problems (2.0.2) mit $u_0 = 0$,
so folgt: $u(t) \equiv 0$ für $t \geq t_0$.

Beweis:

Wegen $\|u_0\|^2 = 0 < \delta(\epsilon, T)$ für alle ϵ und T gilt für die
Lösung zum Startpunkt $u_0 = 0$ nach Satz 2.1:

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} \|u(t)\|^2 < \epsilon$$

für alle $\epsilon > 0$ und alle $T > t_0$. Daraus folgt aber
unmittelbar: $u(t) \equiv 0$.

Bevor wir im nächsten Satz eine hinreichende Bedingung
für die Stabilität der RL $u \equiv 0$ von Gleichung (2.0.2)
angeben, benötigen wir zwei Definitionen.

Definition 2.3

- a) Die RL $u \equiv 0$ von Gleichung (2.0.2) heißt stabil, falls
zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta(\epsilon) > 0$ existiert so, daß aus
 $\|u_0\| < \delta(\epsilon)$ für $t \geq t_0$ folgt: $\|u(t)\| < \epsilon$.
- b) Die Ruhelage heißt asymptotisch stabil, falls sie sta-
bil ist und zusätzlich die folgende Bedingung gilt:
Es existiert eine reelle Zahl $a > 0$, so daß aus
 $\|u_0\| < a$ für die zugehörige Lösung folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

(Ist nur diese Bedingung erfüllt, so bezeichnet man die Ruhelage als attraktiv).

- c) Gilt b) für jedes $a > 0$, so heißt die Ruhelage global asymptotisch stabil.

Definition 2.4

Die Ruhelage $x \equiv 0$ von Gleichung (2.0.1) heißt

- a) stabil, falls zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß aus $0 \leq x_0 < \delta(\varepsilon)$ für $t \geq t_0$ folgt:

$$0 \leq x(t) < \varepsilon.$$

- b) asymptotisch stabil, falls zusätzlich ein $a > 0$ existiert, so daß aus $0 \leq x_0 < a$ folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0.$$

Bemerkung 2.5

Die Stabilitätsdefinitionen für die skalare Differentialgleichung findet man bei Krasovskii [23]. Üblicherweise verlangt man dagegen, daß Anfangswerte aus Umgebungen des Nullpunktes zugelassen werden (vgl. Hahn [17]). Offensichtlich ist mit der üblichen Stabilitätsdefinition auch unsere Definition 2.4 erfüllt, falls die eindeutige Lösbarkeit vorausgesetzt wird.

Im Anschluß an diese Definition geben wir das folgende Lemma an, dessen Beweis trivial ist.

Lemma 2.6

Erfüllt f die Voraussetzungen von Satz 2.1, und ist die Ruhelage $x \equiv 0$ stabil, so gilt die Behauptung von Korollar 2.2.

Aus diesem Grund lassen wir im folgenden die Voraussetzung $f(t, 0) \equiv 0$ weg (vgl. Pao [36]) und fordern nur, daß die Gleichung (2.0.2) für $u_0 \in G$ mit hinreichend kleiner Norm eine (nicht notwendig eindeutige) Lösung besitzt. Wir beweisen nun den folgenden Stabilitätssatz.

Satz 2.7

Für $t \geq t_0$ und $u \in G$ mit $\|u\|^2 < \alpha$ gelte die Abschätzung:

$$2 [f(t, u), u] \leq g(t, \|u\|^2).$$

Ferner existiere für $u_0 \in G$ mit $\|u_0\|^2 < \alpha$ eine Lösung der Gleichung (2.0.2). Dann gilt:

Ist die Ruhelage $x \equiv 0$ der skalaren Differentialgleichung stabil (asymptotisch stabil) im Sinne von Def. 2.4 a) und b), so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ stabil (asymptotisch stabil).

Beweis:

Wegen der Stabilität der RL $x \equiv 0$ existiert eine Zahl $r_0 > 0$, so daß aus $0 \leq x_0 < r_0$ für $t \geq t_0$ folgt: $|x(t)| < \alpha$.

Für $u_0 \in G$ mit $\|u_0\|^2 < r_0$ folgt dann aus Satz 1.8:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t, \|u_0\|^2).$$

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Dann existiert zu $\epsilon^* := \epsilon^2$ eine Zahl $\tilde{\delta}(\epsilon^*)$ nach Def. 2.5 a). Wir definieren

$$\delta(\epsilon) := \left(\min(r_0, \tilde{\delta}(\epsilon^*)) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dann gilt für $u_0 \in G$ mit $\|u_0\| < \delta(\epsilon)$, wenn wir $x_0 := \|u_0\|^2 < r_0$ setzen:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t, x_0) < \epsilon^* = \epsilon^2.$$

Existiert zusätzlich eine Zahl $a' \in \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$$

für $|x_0| < a'$, so gilt für $u_0 \in G$

$$\text{mit } \|u_0\| < a := \left(\min(r_0, a') \right)^{\frac{1}{2}}:$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = 0.$$

Dabei beachte man nur

$$x_0 := \|u_0\|^2 < \min(r_0, a').$$

Wir beweisen nun, daß sich das asymptotische Verhalten der Lösung der skalaren Differentialgleichung auch dann überträgt, wenn die Stabilität der Ruhelage $x \equiv 0$ nicht gefordert wird.

Satz 2.8

Die Abbildung f erfülle für $t \geq t_0$ und $u \in G$ mit $\|u\|^2 < \alpha$ die Voraussetzung von Satz 2.7. Ferner existiere eine Zahl $a_0 > 0$ so, daß für die Lösung des Problems (2.0.1) mit $0 \leq x_0 < a_0$ die Beziehungen

$$\sup_{t \geq t_0} |x(t)| < \alpha \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

folgen. Ist dann u eine Lösung des Problems (2.0.2) mit $u_0 \in G$ und $\|u_0\|^2 < a_0$, so gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

Sei $u_0 \in G$ mit $\|u_0\|^2 < a_0$ und definiere

$$x_0 := \|u_0\|^2.$$

Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\sup_{t \geq t_0} |x(t, x_0)| < \alpha.$$

Daraus folgt, indem man den Satz 1.8 anwendet, für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\|^2 \leq x(t, x_0).$$

Da nach Voraussetzung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = 0$$

ist, folgt die Behauptung. —

Wir wenden uns jetzt der Instabilität der Ruhelage $u \equiv 0$ zu.

Definition 2.9

- a) Die Ruhelage $u \equiv 0$ heißt instabil, falls sie nicht stabil ist.
- b) Die Ruhelage $x \equiv 0$ heißt instabil, falls sie nicht stabil ist (im Sinne der Definition 2.4).

Satz 2.10

Sei g eine stetige Abbildung von $I \times \mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}$, und für $t \geq t_0$ und $u \in G$ gelte die Abschätzung

$$2 [f(t, u), u] \geq g(t, \|u\|^2).$$

Ferner sei eine der folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- i) Das Problem

$$x' = g(t, x) \quad x(t_0) = 0$$

besitze genau eine Lösung x . Für diese gelte $x \neq 0$.

- ii) Die Ruhelage $x \equiv 0$ des Problems

$$x' = g(t, x)$$

sei instabil.

Dann folgt:

Es existiert eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und zu jedem $u_0 \in G$ eine Zahl $T(u_0)$ mit

$$\|u(T(u_0))\|^2 \geq \varepsilon_0.$$

Beweis:

Sei i) erfüllt. Dann existiert ein $T > t_0$ mit

$$x(T) > 0;$$

setze: $\varepsilon_0 = x(T)$. Nach Korollar 1.12 folgt für die Lösung u zum Startwert u_0 wegen $\|u_0\|^2 \geq 0$:

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t, 0).$$

Insbesondere gilt also:

$$\|u(T)\|^2 \geq x(T, 0) = \varepsilon_0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist dagegen ii) erfüllt, so folgt für die Lösung zum Startwert u_0 (mit $x_0 := \|u_0\|^2$):

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t, x_0).$$

Da $x \equiv 0$ instabile Ruhelage ist, existiert eine Zahl ε_0 und zu jedem x_0 eine Zeit $T(x_0)$ mit

$$x(T(x_0), x_0) \geq \varepsilon_0.$$

Daraus folgt sofort die Behauptung. —

Korollar 2.11

Gilt zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 2.10 die Bedingung $f(t, 0) \equiv 0$, so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ instabil.

Der Beweis folgt sofort aus Satz 2.10 und der Definition der Instabilität.

Da wir im obigen Satz nur das Korollar 1.12 benutzt haben, können wir auch noch die folgende Feststellung machen:

Korollar 2.12

Existiert zu jedem $x_0 > 0$ eine monoton, wachsende divergente Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(t_k, x_0) = +\infty,$$

so ist auch jede Lösung u , die zum Startwert $u_0 \neq 0$ gehört, unbeschränkt.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der im Beweis von Satz 2.10 angegebenen Ungleichung:

$$\|u(t)\|^2 \geq x(t, \|u_0\|^2).$$

Im letzten Teil dieses Paragraphen beschäftigen wir uns mit der Frage, inwieweit sich bei speziellen Aussagen über g das qualitative Verhalten der Lösungen beschreiben läßt, ohne explizit die Lösung des skalaren Problems zu kennen.

Wir beginnen mit dem Fall der getrennten Variablen, d.h.

$$g(t, y) = k(t) L(y).$$

Dabei sei k für $t \geq t_0 \geq 0$ und L für $y \geq 0$ definiert. Der erste Satz benutzt Integraleigenschaften zur Konstruktion von Lösungsschranken.

Satz 2.13

Die Funktionen f und g mögen den Voraussetzungen von Satz 1.9 genügen. Sei $K \in \mathbb{R}$ und für $t \geq t_0$ gelte:

$$\int_{t_0}^t k(s) ds \leq K.$$

Ferner sei $L(s) > 0$ für $s > 0$, und für jedes $a > 0$ sei

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t \frac{1}{L(s)} ds = +\infty.$$

Dann folgt:

Zu jedem $\delta > 0$ existiert eine Schranke $M(\delta)$, so daß für die Lösung des Problems

$$\dot{u} = f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

mit $\|u_0\|^2 \leq \delta$ für $t \geq t_0$ gilt:

$$\|u(t)\|^2 \leq M(\delta).$$

Beweis:

Sei $\delta > 0$ vorgegeben und $\|u_0\|^2 \leq \delta$. Weiter sei y die Lösung des Problems

$$y' = k(t) L(y) \quad y(t_0) = \delta.$$

Dann folgt aus Satz 1.9 für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\|^2 \leq y(t).$$

Für die Lösung $y(t)$ gilt die folgende Beziehung:

$$\int_{\delta}^{y(t)} \frac{1}{L(s)} ds = \int_{t_0}^t k(s) ds \leq K \quad (*)$$

Ist dann $K \leq 0$, so folgt wegen der Positivität des Integranden

$$0 \leq y(t) \leq y_0$$

für alle $t \geq t_0$. In diesem Fall definieren wir

$M(\delta) := \delta$, und die Behauptung ist bewiesen.

Sei nun $K > 0$. Da L strikt positiv und stetig (Voraussetzung von Satz 1.9) ist, ist die Abbildung

$$\psi : (0, \infty) \ni t \mapsto \int_{\delta}^t \frac{1}{L(s)} ds$$

wohldefiniert und streng monoton wachsend. Wegen der Divergenz des uneigentlichen Integrals existiert die Zahl

$$M(\delta) := \sup \{ t > 0 \mid \psi(t) \leq K \}.$$

Aus der Beziehung (*) ergibt sich für $t \geq t_0$:

$$\psi(y(t)) \leq K.$$

Da ψ streng monoton wächst, folgt daher aus der Definition von $M(\delta)$:

$$y(t) \leq M(\delta).$$

Mit ähnlichen Bedingungen wie in Satz 2.13 läßt sich die Stabilität (bzw. asymptotische Stabilität) der Ruhelage beweisen. Dazu müssen wir Voraussetzungen über das Verhalten des Integranden in der Nähe der Null machen.

Satz 2.14

f erfülle die Voraussetzung von Satz 1.8. Für $0 < y < \alpha$ sei $L(y) > 0$, und es gelte $L(0) = 0$. Die Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = k(t) L(y)$$

seien positiv. Dann gilt:

- 1) Ist für jedes $0 < a < \alpha$ die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^a \frac{1}{L(s)} ds = +\infty$$

erfüllt, und existiert eine Konstante K mit

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t k(s) ds \leq K,$$

so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ stabil.

2) Gilt die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(s) \, ds = -\infty,$$

und existieren Konstanten $0 < r_0 \leq \alpha_0 < \alpha$ mit

$$\int_{r_0}^{\alpha_0} \frac{1}{L(s)} \, ds \geq \sup_{t \geq 0} \int_0^t k(s) \, ds,$$

so folgt für jede Lösung des Problems

$$\dot{u} = f(t, u) \quad u(0) = u_0$$

mit $\|u_0\|^2 < r_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

1) Nach Satz 2.7 reicht es, zu zeigen, daß die Ruhelage des Problems

$$y' = k(t) L(y)$$

stabil ist. Für die Lösung der Gleichung mit

$y(0) = y_0 \geq 0$ gilt $y(t) \geq 0$ und weiter

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{L(s)} \, ds = \int_0^t k(s) \, ds \leq K.$$

Für $K \leq 0$ ist die Behauptung trivial. Ist $K > 0$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta(\varepsilon) > 0$ mit

$$\int_{\delta(\varepsilon)}^{\min\{\varepsilon, \frac{\alpha}{2}\}} \frac{1}{L(s)} ds = K.$$

Für $0 \leq y_0 \leq \delta(\varepsilon)$ folgt dann

$$\int_{\delta(\varepsilon)}^{y(t)} \frac{1}{L(s)} ds \leq \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{L(s)} ds \leq K.$$

Da das Integral bezüglich der oberen Integrationsgrenze streng monoton wächst, gilt somit für $t \geq 0$

$$0 \leq y(t) \leq \min\{\varepsilon, \frac{\alpha}{2}\} \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Stabilität der Ruhelage bewiesen.

- 2) Nach Satz 2.8 reicht es, zu zeigen, daß für die Lösung des Problems

$$y' = k(t) L(y) \quad y(0) = y_0$$

mit $0 \leq y_0 < r_0$ die Beziehungen $y(t) < \alpha$ und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0 \text{ gelten.}$$

Sei $0 \leq y_0 < r_0$ und wir nehmen an, es existiere eine Zahl $t_1 > 0$ mit

$$y(t_1) \geq \alpha_0.$$

Dann folgt aus der Abschätzung

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t k(s) \, ds \geq \int_0^{t_1} k(s) \, ds = \int_{y_0}^{y(t_1)} \frac{1}{L(s)} \, ds$$

$$> \int_{r_0}^{\alpha_0} \frac{1}{L(s)} \, ds \geq \sup_{t \geq 0} \int_0^t k(s) \, ds$$

ein Widerspruch. Also ist für alle $t \geq 0$ die Bedingung $y(t) < \alpha$ erfüllt. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und definiere

$$M := \int_{\min(\varepsilon, \frac{y_0}{2})}^{y_0} \frac{1}{L(s)} \, ds > 0.$$

Dann existiert wegen der Divergenz des Integrals über k eine Zahl T_0 , so daß für $t \geq T_0$

$$\int_0^t k(s) \, ds \leq -M$$

gilt. Insgesamt ergibt sich somit für $t \geq T_0$ die Ungleichung

$$- \int_{y(t)}^{y_0} \frac{1}{L(s)} \, ds = \int_0^t k(s) \, ds \leq - \int_{\min(\varepsilon, \frac{y_0}{2})}^{y_0} \frac{1}{L(s)} \, ds.$$

Daraus folgt für $t \geq T_0$ sofort:

$$0 \leq y(t) \leq \min \left(\varepsilon, \frac{y_0}{2} \right) \leq \varepsilon,$$

d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$. Damit ist die Behauptung be-

wiesen. —

Korollar 2.15

Ist für jedes $0 < a < \alpha$ die Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \int_x^a \frac{1}{L(s)} ds = +\infty$$

erfüllt, und gilt weiter

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(s) ds = -\infty,$$

so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ asymptotisch stabil.

Beweis:

Wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(s) ds = -\infty$ existiert

$$K := \sup_{t \geq 0} \int_0^t k(s) ds,$$

und nach Satz 2.14.1 ist die Ruhelage $u \equiv 0$ stabil.

Aus der Bedingung an L folgt zu jedem $\alpha_0 < \alpha$ die Existenz einer Konstanten $r_0 \leq \alpha_0$ mit der Eigenschaft:

$$\int_{r_0}^{\alpha_0} \frac{1}{L(s)} ds \geq K.$$

Damit ist nach Satz 2.14.2 die Ruhelage auch attraktiv, und die Behauptung ist bewiesen. —

Der folgende Satz zeigt, daß man die Voraussetzungen an L teilweise aufgeben kann, wenn man die Bedingungen an k verschärft.

Satz 2.16

Für $0 < y < \alpha$ und $t \geq 0$ gelte

$$L(y) > 0 \quad \text{und} \quad k(t) \leq 0.$$

Weiter sei $L(0) = 0$, und die Funktionen f und $g(t, y) = k(t) L(y)$ mögen die Voraussetzungen von Satz 1.8 erfüllen. Dann gilt:

Die Ruhelage $u \equiv 0$ ist stabil. Ist zusätzlich die Be-

dingung $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t k(s) ds = -\infty$ erfüllt, so ist die

Ruhelage asymptotisch stabil.

Beweis:

Nach Satz 2.7 ist die Behauptung für die Ruhelage des Problems

$$y' = k(t) L(y) \quad y(0) = y_0$$

zu beweisen.

Sei $0 < y_0 < \alpha$. Dann ist wegen

$$y'(0) = k(0) L(y_0) \leq 0$$

die Lösung $y(t)$ für hinreichend kleine t monoton fallend, insbesondere also kleiner als α . Solange aber $y(t) < \alpha$ gilt, fällt auch y monoton. Somit ergibt sich für $t \geq 0$

$$0 < y(t) \leq y_0,$$

und die Ruhelage $y \equiv 0$ ist stabil.

Da y monoton fallend und nach unten durch 0 beschränkt ist, existiert eine Zahl $c_0 \geq 0$ mit

$$c_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

Nehmen wir $c_0 > 0$ an, so folgt für $t \geq 0$

$$y(t) \in [c_0, y_0].$$

Da L stetig ist und $L(y) > 0$ für $y > 0$ gilt, existiert eine Konstante $L_1 > 0$ mit

$$L_1 \leq L(y(t))$$

für $t \geq 0$. Wegen $k \geq 0$ folgt somit für $t \geq 0$

$$0 \geq L_1 k(t) \geq k(t) L(y(t)).$$

Andererseits schließt man aus der Differentialgleichung

$$0 \geq c_0 - y_0 = \int_0^{\infty} y'(t) dt = \int_0^{\infty} k(t) L(y(t)) dt.$$

Dies hat die Beziehung

$$0 \geq \int_0^{\infty} L_1 k(t) dt \geq c_0 - y_0$$

zur Folge. Da $L_1 > 0$ ist, ergibt sich mit

$$0 \geq \int_0^{\infty} k(t) dt \geq \frac{c_0 - y_0}{L_1} > -\infty$$

ein Widerspruch. Somit ist $c_0 = 0$ und die Behauptung bewiesen. —

Setzt man $L(y) = y$, so überlegt man sich leicht, daß sich die Voraussetzungen an k in den Sätzen 2.14 / 2.15 nicht abschwächen lassen. Wir schränken nun die Funktion g weiter ein, indem wir $k(t) \equiv 1$ setzen. Wie oben setzen wir jedoch voraus, daß das Anfangswertproblem

$$y' = L(y) \quad y(0) = y_0$$

für $y_0 > 0$ eindeutig lösbar ist, und daß für die Lösung $y(t) > 0$ gilt. Für diesen Fall der autonomen Vergleichsdifferentialgleichung erhalten wir sehr einfache Bedingungen zur Beschreibung des qualitativen Verhaltens.

Wir fassen die Ergebnisse im folgenden Satz zusammen.

Satz 2.17

f erfülle für $\|u\|^2 < \alpha$ die Voraussetzung von Satz 1.8.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) Ist $L(\alpha) = 0$, dann gilt für die zum Startwert u_0 mit $\|u_0\|^2 < \alpha$ gehörige Lösung

$$\|u(t)\|^2 < \alpha.$$
- b) Existiert eine Nullfolge $y_n \in (0, \alpha)$ mit $L(y_n) = 0$ oder ist $L(y) \leq 0$ für $y \in [0, \alpha)$, so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ stabil.
- c) Sei L auf dem Intervall $[0, \alpha]$ Lipschitz-stetig, $L(0) = 0$ und $L(y) < 0$ für $y \in (0, \alpha)$, dann ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

Beweis:

- a) Da nach Voraussetzung $y(t) \equiv \alpha$ eine Lösung von $y' = L(y)$ ist, folgt wegen der eindeutigen Lösbarkeit für jede Lösung $y(t)$ mit $y_0 < \alpha$ auch $y(t) < \alpha$. Ist u_0 mit $\|u_0\|^2 < \alpha$ vorgegeben, so definiere man $y_0 := \|u_0\|^2$ und die Behauptung folgt aus Satz 1.8.
- b) Da $L(y_n) = 0$ ist, sind die Funktionen $\bar{y}_n(t) \equiv y_n$ sämtlich Lösungen der Differentialgleichung. Aus der

Eindeutigkeit der Lösung und der Tatsache, daß

$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ist, folgt mit Hilfe von Satz 2.7 die

Behauptung.

- c) Wegen $L(y) < 0$ für $y \in (0, \alpha)$ sind die Lösungen streng monoton fallend. Da y nach unten beschränkt ist, existiert zu jeder Lösung $y(t)$ mit $0 < y_0 < \alpha$ eine Zahl c_0 mit

$$c_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t).$$

Die Lipschitz-Stetigkeit von L zieht die gleichmäßige Stetigkeit von y' nach sich, und somit gilt (s. Knobloch-Kappel [22])

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0.$$

Daraus folgt wegen $L(y) \neq 0$ für $y > 0$ sofort:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad \text{---}$$

Korollar 2.18

Sei L auf jedem abgeschlossen, beschränkten Intervall Lipschitz-stetig. Ferner sei $L(0) = 0$ und $L(y) < 0$ für $y > 0$. Dann ist die Ruhelage $u \equiv 0$ global asymptotisch stabil.

Beweis:

Sei u_0 gegeben und definiere $y_0 := \|u_0\|^2$. Dann ist die zugehörige Lösung $y(t)$ streng monoton fallend. Insbesondere folgt nach Satz 1.9 für $t \geq 0$:

$$\|u(t)\|^2 \leq y(t) \leq y_0 = \|u_0\|^2,$$

und die Ruhelage ist stabil.

Wähle nun $\alpha > y_0$. Dann ist L Lipschitz-stetig auf $[0, \alpha]$ und $L(y) < 0$ für $y \in (0, \alpha)$. Dann folgt die Behauptung aus Satz 2.15 c).—

Der letzte Satz beinhaltet eine einfache Vorzeichenbedingung, die die Instabilität der Ruhelage garantiert.

Satz 2.19

f und g mögen die Voraussetzungen von Satz 2.10 erfüllen. Es existiere eine Zahl $\alpha_0 > 0$ mit $L(y) > 0$ für $0 < y < \alpha_0$. Ferner sei L Lipschitz-stetig auf jedem abgeschlossenen Intervall J mit $J \subset (0, \alpha_0)$. Dann ist die Ruhelage $u \equiv 0$ instabil.

Beweis:

Sei u_0 vorgegeben mit $y_0 := \|u_0\|^2 < \alpha_0$. Die zugehörige Lösung $y(t)$ ist streng monoton wachsend. Wir behaupten, daß stets eine Zahl $T_0 := T(y_0)$ existiert mit

$$y(T) \geq \frac{y_0}{2}.$$

Dies ist für $y_0 \geq \frac{\alpha_0}{2}$ trivial. Sei also $y_0 < \frac{\alpha_0}{2}$, und wir nehmen an, daß für alle $t \geq 0$

$$y(t) < \frac{\alpha_0}{2}$$

gilt. Dann existiert $c_0 := \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$, und wegen der

Lipschitz-Stetigkeit von L gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0.$$

Daraus folgt $L(c_0) = 0$, und wir haben einen Widerspruch zur Voraussetzung $L(y) > 0$ für $y \in (0, \alpha_0)$ erhalten. Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.10. —

§ 3 Die Differentialgleichung $\ddot{u} = Au + F(t, u)$

Nachdem wir am Ende von § 2 Aussagen unter einschränkenden Voraussetzungen für die skalare Vergleichsdifferentialgleichung hergeleitet haben, wollen wir nun spezielle Abbildungen f betrachten. Wir setzen voraus, daß sich f als Summe eines autonomen und eines zeitabhängigen Anteils

$$f(t, u) = Au + F(t, u)$$

schreiben läßt. Dabei sei A eine Abbildung mit dem Definitionsbereich $D(A)$, von der weder Beschränktheit noch Linearität verlangt wird. Die Abbildung F sei auf dem Produkt $[t_0, \infty) \times G$ definiert, wobei G eine Teilmenge des normierten Raumes X ist. Generell nehmen wir an, daß für Lösungen der Gleichung

$$\ddot{u} = Au + F(t, u)$$

stets die Bedingung $u(t) \in D(A) \cap G$ erfüllt ist.

Der erste Satz gibt eine hinreichende Bedingung für die asymptotische Stabilität der Ruhelage $u \equiv 0$ an. Es handelt sich dabei um die Verallgemeinerung eines von Pao [36] erzielten Ergebnisses.

Satz 3.1

Seien α und β reelle Zahlen, und für $u \in D(A) \cap G$ gelte:

$$(3.1.1) \quad [Au, u] \leq \beta \|u\|^2.$$

Ferner sei F die Summe der Abbildungen F_1 und F_2 , die den folgenden Bedingungen genügen:

i) Es existiert eine Konstante $\rho > 0$, so daß für

$$t \geq t_0 \quad \text{und} \quad \|u\| \leq \rho \quad (u \in D(A) \cap G) \quad \text{gilt:}$$

$$(3.1.2) \quad [F_1(t, u), u] \leq \alpha \|u\|^2.$$

ii) Es existiert eine stetige Funktion k mit

$$(3.1.3) \quad [F_2(t, u), u] \leq k(t) \|u\|^2$$

$$\text{für } u \in D(A) \cap G \quad \text{und} \quad t \geq t_0.$$

Dann gilt:

a) Existiert eine Konstante K mit

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + k(s)) \, ds \leq K,$$

so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ stabil.

b) Gilt die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + k(s)) \, ds = +\infty,$$

so ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

Beweis:

Aus den Formeln (3.1.1), (3.1.2) und (3.1.3) ergibt sich für $u \in D(A) \cap G$ mit $\|u\|^2 \leq \rho^2$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2[f(t, u), u] &= 2([Au, u] + [F_1(t, u), u] + [F_2(t, u), u]) \\ &\leq 2(\alpha + \beta + k(t)) \|u\|^2. \end{aligned}$$

Definieren wir für $(t, y) \in [t_0, \infty) \times [0, \rho^2]$ die Funktion

$$g(t, y) := 2(\alpha + \beta + k(t)) y,$$

so erfüllen f und g die Voraussetzungen von Satz 1.8.

Wir setzen $m(t) := 2(\alpha + \beta + k(t))$ und $L(y) := y$.

Beachten wir, daß für jedes $0 < a < \rho^2$ die Beziehung

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^a \frac{1}{y} \, dy = +\infty$$

gültig ist, so folgt die Behauptung a) aus Satz 2.14.1

und die Behauptung b) aus Korollar 2.15. —

Bemerkung 3.2

Die Einschränkung, daß (3.1.2) nur für $\|u\| \leq \rho$ gilt, ist nicht an F_1 gebunden. Sie kann ebenso bei (3.1.1) oder (3.1.3) auftreten.

Die Aussage bleibt dann weiter richtig. Sind die Abschätzungen ohne Einschränkung gültig, so erhält man globale asymptotische Stabilität.

Der folgende Satz liefert ein Kriterium für die Wahl von α , β und k , so daß die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + k(s)) \, ds = -\infty$$

erfüllt ist.

Satz 3.3

Sei $\alpha + \beta < 0$ und σ eine reelle Zahl, so daß für hinreichend große t die Ungleichung

$$(t - t_0)^{-1} \int_{t_0}^t k(s) \, ds \leq \sigma < |\alpha + \beta|$$

gilt. Dann folgt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + k(s)) \, ds = -\infty.$$

Zum Beweis benutzen wir das

Lemma 3.4

Seien ψ_1 und ψ_2 stetige, für $t \geq t_0$ definierte reellwertige Funktionen, und es gelte:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \psi_2(t) = -\infty.$$

Existiert eine Konstante $M_1 > -1$, so daß für hinreichend große t

$$M_1 \leq \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)}$$

gilt, so folgt auch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\psi_1(t) + \psi_2(t)\} = -\infty.$$

Der Beweis von Lemma 3.4 beruht auf der Tatsache, daß nach Voraussetzung für hinreichend große t die Darstellung

$$\psi_1(t) + \psi_2(t) = \psi_2(t) \left\{ 1 + \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \right\}$$

gilt. Weiter ist für hinreichend große t

$$1 + \frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \geq 1 + M_1 > 0,$$

woraus unmittelbar die Behauptung folgt.

Zum Beweis von Satz 3.3 setzen wir nun

$$\psi_1(t) := \int_{t_0}^t k(s) \, ds$$

$$\text{und} \quad \psi_2(t) := (\alpha + \beta)(t - t_0).$$

Nach Voraussetzung gilt dann für hinreichend große t

$$\frac{\psi_1(t)}{\psi_2(t)} \leq \frac{\sigma}{(\alpha + \beta)} < -1,$$

und die Behauptung folgt aus Lemma 3.4. —

Bemerkung 3.5

Die Voraussetzung $\alpha + \beta < 0$ läßt sich stets dann erfüllen, wenn $\beta < 0$ und $\|F_1(t, u)\| = o(\|u\|)$ gilt.

Die Bedingung (3.1.2) ergibt sich in diesem Fall aus der Definition des Semi-Skalarproduktes. Diese und die Voraussetzung an k aus Satz 3.3 benutzt Pao [36] zum Beweis der Aussage 3.1 b). Ferner verlangt er, daß der Raum X vollständig ist. Als letztes weisen wir noch darauf hin, daß diese Aussage die Verallgemeinerung eines aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wohlbekannten Resultates ist, falls man $k(t) \equiv 0$, $X = \mathbb{R}^n$ und A als stabile $n \times n$ - Matrix voraussetzt.

Der nächste Satz zeigt, daß auch unter anderen Bedingungen an F_2 die Lösungen, die in einer gewissen Umgebung der Null starten, beschränkt bleiben und gegen den Ursprung konvergieren.

Satz 3.6

Die Abbildungen A und F_1 mögen die Voraussetzungen von Satz 3.1 mit $\alpha + \beta < 0$ erfüllen. Für $t \geq t_0$ und $u \in D(A) \cap G$ mit $\|u\| \leq \rho$ gelte ferner

$$\|F_2(t, u)\| \leq \gamma(t).$$

Dabei sei $\gamma(t)$ eine stetige Funktion, die den folgenden Bedingungen genügt:

$$i) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \exp(2(\alpha + \beta)(t-s)) \gamma(s) ds = 0.$$

$$\text{ii) } M := \sup_{t \geq t_0} \int_{t_0}^t \exp \{ 2(\alpha + \beta)(t-s) \} \gamma(s) \, ds < \frac{\rho}{2}.$$

Definiert man zu $\varepsilon > 0$ mit $2M < \varepsilon \leq \rho$ die positive reelle Zahl:

$$\delta := (\varepsilon^2 - 2M\varepsilon)^{\frac{1}{2}},$$

so folgt:

Ist $u(t)$ Lösung des Problems für $u_0 \in D(A) \cap G$ mit $\|u_0\| < \delta$, so gilt für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\| < \varepsilon.$$

Für jede Lösung, die in $u_0 \in D(A) \cap G$ mit

$\|u_0\|^2 < \rho^2 - 2\rho M$ startet, gilt die Beziehung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

Für $u \in D(A) \cap G$ mit $\|u\|^2 \leq \rho^2$ erhalten wir die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} 2[f(t, u), u] &\leq 2(\alpha + \beta)\|u\|^2 + 2[F_2(t, u), u] \\ &\leq 2(\alpha + \beta)\|u\|^2 + 2\gamma(t)\|u\| \\ &\leq 2(\alpha + \beta)\|u\|^2 + 2\gamma(t)\rho. \end{aligned}$$

Als Vergleichsfunktion g definieren wir also:

$$g: [t_0, \infty) \times [0, \rho^2] \ni (t, y) \mapsto 2(\alpha + \beta)y + 2\rho\gamma(t).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(t, y) \quad y(t_0) = y_0 \geq 0 \quad t \geq t_0$$

lautet:

$$y(t) = y_0 \exp [2(\alpha + \beta)(t - t_0)] + 2\rho \int_{t_0}^t \exp [2(\alpha + \beta)(t - s)] \gamma(s) ds.$$

Ist nun $0 \leq y_0 < \rho^2 - 2\rho M$, so folgt aus der Bedingung ii) und wegen $\alpha + \beta < 0$:

$$0 \leq y(t) = y_0 + 2\rho M < \rho^2.$$

Ferner folgt aus i), daß der zweite Summand in der Lösungsdarstellung gegen 0 konvergiert. Damit gilt insgesamt für $y_0 < \rho^2 - 2\rho M$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Die Konvergenzbehauptung folgt nun sofort aus Satz 2.8

(mit $a_0 = \rho^2 - 2\rho M$).

Um die erste Behauptung zu beweisen, konstruieren wir

für $2M < \epsilon \leq \rho$ die Funktion

$$g_\epsilon : [t_0, \infty) \times [0, \epsilon^2] \ni (t, y) \rightarrow 2(\alpha + \beta)y + 2\epsilon y(t),$$

Für $\|u\|^2 \leq \epsilon^2$ gilt dann die Beziehung

$$2[f(t, u), u] \leq g_\epsilon(t, \|u\|^2).$$

Man rechnet leicht nach, daß für die Lösung des Problems

$$y' = g_{\varepsilon}(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

mit $0 \leq y_0 < \varepsilon^2 - 2 \in M$ für $t \geq t_0$ gilt:

$$0 \leq y(t) < \varepsilon^2.$$

Daraus folgt nach Satz 1.8 sofort die Behauptung. —

Bemerkung 3.7

Auffallend an der Formulierung von Satz 3.6 ist, daß wir ε nach unten beschränken müssen. Dies hat folgenden Grund:

Da $y \equiv 0$ keine Lösung von $y' = g(t, y)$ ist, kann zu $u_0 = 0$ eine Lösung u mit $u(t) \neq 0$ gehören (vgl. Korollar 2.3).

Sei $\bar{u}$ die Lösung, die zum Startwert u_0 gehört, und bezeichne mit $\bar{y}_{\varepsilon}$ die Lösung des Problems

$$y' = g_{\varepsilon}(t, y) \quad y(t_0) = 0.$$

Wegen $\bar{y}_{\varepsilon}(t) \leq 2 \in M$ für $t \geq t_0$ folgt aus Satz 1.8:

$$\|\bar{u}(t)\|^2 \leq \bar{y}_{\varepsilon}(t) \leq 2 \in M.$$

Da diese Ungleichung für $\varepsilon > 2M$ gilt, folgt durch Grenzübergang

$$\|\bar{u}(t)\|^2 \leq 4M^2.$$

Da die Behauptung von Satz 3.6 aber auch für $u_0 = 0$, kann ε nicht kleiner als

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{u}(t)\| \leq 2M$$

gewählt werden.

In diesem Sinne ist $2M$ eine natürliche Schranke für die Wahl von ε .

Zu den Bedingungen i) und ii) wollen wir die folgende Erläuterung geben: Es ist klar, daß aus i) die Existenz des Supremums in ii) folgt. Weiter kann offensichtlich, wenn wir die Störung γ hinreichend klein halten, die Bedingung ii) dann stets erfüllt werden. Hinreichende Bedingungen für γ , so daß die Voraussetzung i) erfüllt ist, liefert das folgende Lemma. Der Beweis findet sich z.B. in dem Buch von Reißig-Sansone-Conti [39].

Lemma 3.8

Ist γ stetig und gilt entweder $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$ oder

$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$, so ist die Bedingung i) von Satz 3.6 erfüllt.

Der Satz 3.6 ist dann nicht anwendbar, wenn γ eine konstante Funktion ist. Ist jedoch diese Konstante hinreichend klein, so läßt sich die Aussage über die Beschränktheit von Lösungen aufrechterhalten. Dies beweist der folgende Satz.

Satz 3.9

Seien A und F_1 wie in Satz 3.1 mit $\alpha + \beta < 0$ vorgegeben. Es existiere eine Konstante $\gamma > 0$, so daß für $t \geq t_0$ und $\|u\| \leq \rho$ ($u \in D(A) \cap G$) die Abschätzung

$$\|F_2(t, u)\| \leq \gamma$$

gilt. Ist $\gamma |\alpha + \beta|^{-1} \leq \rho$, so folgt aus

$$\|u_0\| < \gamma |\alpha + \beta|^{-1} \quad \text{für } t \geq t_0:$$

$$\|u(t)\| < \gamma |\alpha + \beta|^{-1}.$$

Beweis:

Wir definieren die Vergleichsfunktion

$$g: [t_0, \infty) \times [0, \rho^2] \ni (t, y) \rightarrow 2(\alpha + \beta)y + 2\gamma\sqrt{y}.$$

Dann folgt aus den gegebenen Abschätzungen:

$$2[f(t, u), u] \leq g(t, \|u\|^2) =: L(\|u\|^2).$$

Die Funktion L ist von t unabhängig und besitzt die Nullstellen $\xi_1 = 0$ und $\xi_2 = \gamma^2 |\alpha + \beta|^{-2}$. Für $0 < y < \xi_2$ ist $L(y) > 0$. Das Anfangswertproblem

$$y' = L(y) \quad y(t_0) = y_0$$

ist für $0 < y_0 < \xi_2$ eindeutig lösbar. Die Lösung $y(t)$ ist streng monoton wachsend und es gilt für $t \geq t_0$

$$y(t) < \xi_2 \leq \rho^2.$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.17 (bzw. Satz 1.8).—

Wir beweisen nun, daß unter gewissen Voraussetzungen das Anfangswertproblem im Banachraum keine beschränkte Lösung besitzt.

Satz 3.10

Seien α und β reelle Zahlen und für $u \in D(A) \cap G$ gelte:

$$[Au, u] \geq \alpha \|u\|^2$$

und

$$[F_1(t, u), u] \geq \beta \|u\|^2.$$

Weiter sei

$$[F_2(t, u), u] \geq \gamma(t) \|u\|^2.$$

Dabei sei $\gamma(t)$ eine stetige Funktion und es gelte:

$$(3.10.1) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + \gamma(s)) ds = +\infty.$$

Dann folgt für jede Lösung, die zu einem Startwert

$u_0 \neq 0$ gehört:

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = +\infty.$$

Beweis:

Wir definieren die Abbildung

$$g: t_0, \infty) \times \mathbb{R}_+ \ni (t, y) \rightarrow 2(\alpha + \beta + \gamma(t))y.$$

Dann gilt für $u \in D(A) \cap G$ und $t \geq t_0$:

$$2[f(t, u), u] \geq g(t, \|u\|^2).$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t, y) \quad y(t_0) = y_0 > 0$$

besitzt die Lösung

$$y(t) = y_0 \exp \left\{ \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + \gamma(s)) ds \right\},$$

und damit folgt aus der Voraussetzung

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} y(t) = +\infty.$$

Somit ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus Korollar 1.12.—

Das folgende Lemma zeigt, wie sich die Bedingung (3.10.1) realisieren läßt.

Lemma 3.11

Sei $\alpha + \beta > 0$ und σ eine reelle Zahl, so daß für hinreichend große t die Abschätzung

$$-(\alpha + \beta) < \sigma \leq (t - t_0)^{-1} \int_{t_0}^t \gamma(s) ds$$

gültig ist. Dann ist die Bedingung (3.10.1) erfüllt.

Zum Beweis definiere man die Funktionen

$$\psi_1(t) := - \int_{t_0}^t \gamma(s) ds$$

und
$$\psi_2(t) := -(\alpha + \beta)(t - t_0).$$

Für ψ_1 und ψ_2 sind die Voraussetzungen von Lemma 3.4 erfüllt, und somit folgt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\alpha + \beta + \gamma(s)) \, ds = +\infty.$$

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch kurz auf den Fall eingehen, daß A abhängig von t ist. Wir betrachten also das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = A(t, u) + F(t, u) \quad u(t_0) = u_0.$$

Dabei nehmen wir an, daß der Definitionsbereich von A unabhängig von t ist. Gilt nun eine Abschätzung der Form

$$[A(t, u), u] \leq \alpha \|u\|^2$$

$$\text{oder} \quad [A(t, u), u] \geq \alpha \|u\|^2,$$

so sind offensichtlich die vorherigen Sätze ohne weiteres anwendbar.

Für den Fall der zeitabhängigen Abschätzungen wollen wir ein Ergebnis von Bakushinski [2] beweisen, daß dieser unter wesentlich stärkeren Voraussetzungen herleitet. Außerdem werden wir andere als die in [2] benutzten Bedingungen angeben, unter denen das Ergebnis gültig bleibt.

Satz 3.12

Sei $D(A)$ der gemeinsame Definitionsbereich der Operatoren $A(t, \cdot)$. Für $u \in D(A) \cap G$ und $t \geq t_0$ gelte:

$$2 [A(t, u), u] \leq \alpha(t) \|u\|^2$$

und $2 [F(t, u), u] \leq \gamma(t) \|u\|^2$.

Die Funktionen α und γ mögen den folgenden Bedingungen genügen:

$$(3.12.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds = -\infty.$$

$$(3.12.2) \quad \gamma(t) \geq 0 \quad \text{für} \quad t \geq t_0.$$

$$(3.12.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) \, d\xi \right] \gamma(s) \, ds = 0.$$

Dann folgt für jede Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = A(t, u) + F(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

die Beziehung: $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$.

Beweis:

Wegen (3.12.1) und (3.12.3) existieren die reellen Zahlen

$$K_1 := \sup_{t \geq t_0} \left(\exp \int_{t_0}^t \alpha(s) \, ds \right)$$

und
$$K_2 := \sup_{t \geq t_0} \left\{ \int_{t_0}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] \gamma(s) ds \right\}.$$

Sei $u_0 \in D(A) \cap G$ gegeben und definiere $y_0 := \|u_0\|^2$.

Wähle dann $M \in \mathbb{R}$ so groß, daß

$$y_0 < \frac{M(M - K_2)}{K_1}$$

gilt. Wir betrachten nun die folgende Abbildung

$$g: \mathbb{R}_+ \times [0, M^2] \ni (t, y) \rightarrow \alpha(t)y + \gamma(t)M.$$

Beachtet man (3.12.2) und die Abschätzungen für A und F, so gilt für $u \in D(A) \cap G$ mit $\|u\|^2 \leq M^2$ die Beziehung

$$2 [A(t, u) + F(t, u), u] \leq \alpha(t) \|u\|^2 + M\gamma(t).$$

Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = g(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

lautet bekanntlich:

$$y(t) = y_0 \exp \left[\int_{t_0}^t \alpha(s) ds \right] + M \int_{t_0}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] \gamma(s) ds.$$

Wegen (3.12.2) gilt für die Lösung stets: $y(t) \geq 0$.

Ferner folgt:

$$y(t) \leq y_0 K_1 + M K_2 < M^2.$$

Weiterhin ergibt sich aus (3.12.1) und (3.12.3)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.8.—

Korollar 3.13

Die Voraussetzungen von Satz 3.12 seien erfüllt. Wählt man zu $\varepsilon > K_2$ die Zahl

$$\delta(\varepsilon) := \left(\frac{\varepsilon(\varepsilon - K_2)}{K_1} \right)^{\frac{1}{2}},$$

so gelten für die Lösung u zum Startwert u_0 mit

$\|u_0\| < \delta(\varepsilon)$ die Beziehungen

$$\|u(t)\| < \varepsilon$$

für $t \geq t_0$ und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Die Behauptung ergibt sich sofort, wenn man im Beweis von Satz 3.12 M durch ε ersetzt.

Bemerkung 3.14

Die Beschränkung in der Wahl von ε hängt im wesentlichen damit zusammen, daß $y \equiv 0$ keine Lösung von $y' = g(t, y)$ ist (s. dazu auch Bemerkung 3.7).

Sind die Abschätzungen für A und F nur für $\|u\| \leq \rho$ erfüllt und ist $\rho > K_2$, so bleiben die Aussagen von Satz 3.12 und Korollar 3.13 im Kern erfüllt. In Satz 3.12

sind nur Startwerte u_0 mit $\|u_0\|^2 \leq \frac{\rho(\rho - K_2)}{K_1}$ zulässig.

In Korollar 3.13 bleibt die Behauptung für $\varepsilon \leq \rho$ richtig.

Wir stellen nun noch hinreichende Bedingungen für die Funktionen α und γ vor, so daß die Voraussetzungen (3.12.1) und (3.12.3) erfüllt sind. Eine ähnliche Bedingung, die garantiert, daß die Lösungen des Problems

$$y' = g(t, y)$$

gegen 0 konvergieren, findet sich bei Hahn [17].

Lemma 3.15

Seien α und γ für $t \geq t_0$ definierte, stetige Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:

i) $\alpha(t) < 0$ für $t \geq t_0$.

ii)
$$\int_{t_0}^{\infty} \alpha(s) ds = -\infty.$$

iii)
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) (\alpha(t))^{-1} = 0.$$

Dann sind die Bedingungen (3.12.1) und (3.12.3) erfüllt.

Beweis:

Wegen i) und ii) ist die Bedingung (3.12.1) trivialerweise erfüllt.

Für reelle Zahlen t und T mit $t \geq T \geq t_0$ schätzen wir ab:

$$I(t) := \left| \int_{t_0}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] \gamma(s) ds \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{t_0}^T \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] |\gamma(s)| ds \\ &+ \int_T^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] |\gamma(s)| ds. \end{aligned}$$

Wegen i) und iii) existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für $s \geq t_0$ stets gilt:

$$|\gamma(s)| \leq c|\alpha(s)| = c(-\alpha(s)).$$

Daraus folgt für den ersten Summanden:

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^T \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] |\gamma(s)| ds \\ &\leq c \int_{t_0}^T \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] (-\alpha(s)) ds \\ &= c \left(\exp \left[\int_T^t \alpha(\xi) d\xi \right] - \exp \left[\int_{t_0}^t \alpha(\xi) d\xi \right] \right) \\ &\leq c \exp \left[\int_T^t \alpha(\xi) d\xi \right] \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert nach iii) eine Zahl $T_0 := T_0(\varepsilon)$ mit

$$|\gamma(s)| \leq \varepsilon|\alpha(s)| = \varepsilon(-\alpha(s))$$

für $s \geq T_0$.

Daraus folgt für $t \geq T_0$

$$\begin{aligned} & \int_{T_0}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] |\gamma(s)| ds \\ & \leq \varepsilon \int_{T_0}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] (-\alpha(s)) ds \\ & = \varepsilon - \varepsilon \exp \left[\int_{T_0}^t \alpha(\xi) d\xi \right] \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wähle nun $T_1 := T_1(\varepsilon)$ so, daß für $t \geq T_1(\varepsilon)$

$$\int_{t_0}^{T_0} \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] |\gamma(s)| ds < \varepsilon$$

gilt. Für $t \geq \max(T_0, T_1)$ folgt dann:

$$0 \leq I(t) < 2\varepsilon.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. —

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.15 wurde die Behauptung in Satz 3.12 von Bakushinski [2] bewiesen (allerdings unter strengeren Bedingungen an A und den Raum X). Ähnlich wie im Fall der linearen, inhomogenen Differentialgleichungen mit konstanter Koeffizientenmatrix läßt sich unter etwas modifizierten Voraussetzungen die Behauptung von Lemma 3.15 beweisen.

Lemma 3.16

α genüge den Voraussetzungen i) und ii) von Lemma 3.15.
 γ sei eine stetige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

$$1) \quad \int_{t_0}^{\infty} |\gamma(t)| \, dt < \infty.$$

2) Es existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für
 $t \geq t_0$

$$|\gamma(t)| \leq c |\alpha(t)|$$

gilt.

Dann sind die Bedingungen (3.12.1) und (3.12.3) erfüllt.

Beweis:

Wegen 1) existiert zu $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\tilde{T}_0(\varepsilon)$, so daß
 für $t \geq \tilde{T}_0(\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{T}_0(\varepsilon)}^t \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) \, d\xi \right] |\gamma(s)| \, ds \\ & \leq \int_{\tilde{T}_0(\varepsilon)}^t |\gamma(s)| \, ds < \varepsilon. \end{aligned}$$

Nach dem Beweis zu Lemma 3.15 folgt aus 2) die Existenz

einer Zahl $\tilde{T}_1(\varepsilon)$, so daß für $t \geq \tilde{T}_1(\varepsilon)$

$$\int_{t_0}^{\tilde{T}_0(\varepsilon)} \exp \left[\int_s^t \alpha(\xi) d\xi \right] |\gamma(s)| ds < \varepsilon$$

gilt. Somit folgt für $t \geq \max \{ \tilde{T}_0(\varepsilon), \tilde{T}_1(\varepsilon) \}$
ebenfalls

$$I(t) < 2\varepsilon ,$$

und die Behauptung ist bewiesen.---

Kapitel II Lineare Differentialgleichungen mit Dauerstörungen

In diesem Kapitel wollen wir uns mit den folgenden Typen von Differentialgleichungen in einem Banachraum X beschäftigen:

$$(1) \quad \dot{u} = Au + p(t)$$

$$(2) \quad \dot{u} = Au + f(t, u).$$

Unter einer Lösung der Differentialgleichung wollen wir hier eine in $[0, \infty)$ stark differenzierbare Funktion

$$u : [0, \infty) \rightarrow X$$

verstehen, die überall der Differentialgleichung genügt (vgl. Kapitel I). Wir setzen generell voraus, daß der lineare Operator A eine stark stetige Halbgruppe erzeugt. Dies hat zur Folge, daß das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = Au \quad u(0) = u_0$$

eindeutig lösbar ist, falls u_0 zum Definitionsbereich von A gehört. Einige weitere Ergebnisse über A und den Zusammenhang zwischen dem Operator A und der erzeugten Halbgruppe stellen wir in § 4 zusammen. Auf die Charakterisierung derjenigen linearen Operatoren, die stark stetige Halbgruppen erzeugen, gehen wir jedoch nicht ein. (Satz von Hille-Phillips-Yosida [18], [44]).

Im Gegensatz zu Kapitel I benutzen wir in diesem Kapitel Lösungsdarstellungen, um Beschränktheits- und Stabilitätsaussagen zu beweisen. Wir beginnen deshalb in § 5 bei der Behandlung der inhomogenen Gleichung mit zwei Sätzen über die Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung der Lösungen. Anschließend geben wir zwei Bedingungen für p an, so daß alle Lösungen der Gleichung (1) beschränkt sind. Dazu ist Voraussetzung, daß die Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{u} = Au$ beschränkt sind. Jedoch läßt sich auch für den Fall, daß die Lösungen der homogenen Gleichung unbeschränkt sind, durch geschickte Wahl von p die Existenz genau einer beschränkten Lösung erzwingen. Diese Untersuchungen lehnen sich eng an die für gewöhnliche Differentialgleichungen bekannten an (vgl. [39] und [32]).

Genügt f einer Lipschitz-Bedingung in der zweiten Komponente, so existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems für die Gleichung (2). Diese läßt sich als Lösung einer Volterraschen Integralgleichung darstellen. Das Problem der Existenz einer Lösung ist vielfach behandelt. Ausführliche Literaturhinweise finden sich bei Carroll [5] und Friedman [15]. Beim Beweis der Existenzaussagen werden gewöhnlich Hilfsmittel aus der Spektraltheorie benutzt. Wir wollen dagegen einen Satz angeben, so daß sich die Existenz einer Lösung mittels sukzessiver Approximation beweisen läßt.

Für unsere Betrachtungen über das Verhalten der Lösungen von Gleichung (2) benötigen wir diesen Satz jedoch nicht.

Im Anschluß daran untersuchen wir die Beziehungen zwischen den Lösungen der Gleichungen (1) und (2). Wir werden zeigen, daß sich unter einschränkenden Voraussetzungen an f und p die Lösungen homöomorph aufeinander abbilden lassen und asymptotisch gleich sind. Aussagen über die Beschränktheit und das asymptotische Verhalten von Lösungen der Gleichung (2) werden dann entwickelt, indem wir diese mit Lösungen einer geeigneten Gleichung der Form (1) vergleichen. Untersuchungen dieser Art sind für gewöhnliche Differentialgleichungen von Brauer [3] und Coppel [7] durchgeführt worden.

Im § 7 setzen wir voraus, daß $u \equiv 0$ eine Lösung von Gleichung (2) ist, und beweisen einen Stabilitäts- und einen Instabilitätssatz. Für den Instabilitätssatz benutzen wir die in Kapitel I entwickelten Methoden. Der letzte Paragraph dieses Kapitels enthält eine einfache Anwendung der Theorie.

§ 4 Stark stetige Halbgruppen

Wir benötigen einige Grundlagen aus der Halbgruppentheorie, die wir ohne Beweis zitieren. Wegen der näheren Einzelheiten verweisen wir auf Dunford-Schwartz [11], Hille-Phillips [18] und Yoshida [24].

Definition 4.1

Sei $\{T_t \mid t \geq 0\}$ eine Familie von stetigen, linearen Abbildungen des Banachraumes X in sich. Dann heißt $\{T_t\}$ eine stark stetige Halbgruppe, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) $T_0 = I$ (identischer Operator in X)

ii) Für $t, s \geq 0$ gilt: $T_{t+s} = T_t T_s$

iii) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung

$$[0, \infty) \ni t \rightarrow T_t x \in X$$

stetig.

Sehr wichtig für unsere Überlegungen ist die Tatsache, daß $\|T_t\|$ höchstens exponentiell wächst. Es existieren nämlich stets Konstanten $M \geq 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß für $t \geq 0$

$$\|T_t\| \leq M e^{\alpha t}$$

gilt.

Genauere Auskunft gibt der folgende

Satz 4.2

Sei $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$ eine stark stetige Halbgruppe. Dann existiert der Grenzwert

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|T_t\|}{t},$$

und zu jedem $\delta > \omega_0$ gibt es eine Zahl M_δ , so daß für $t \geq 0$

$$\|T_t\| \leq M_\delta e^{\delta t}$$

gilt.

Eine wichtige Rolle in der Theorie der Halbgruppen spielen die infinitesimalen Generatoren.

Definition 4.3

Sei $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$ eine stark stetige Halbgruppe, und $D(A)$ sei die Menge aller $x \in X$, für die der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}$$

existiert. Auf $D(A)$ definiere man den Operator A durch die Beziehung

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T_t x - x}{t}.$$

Dann heißt A der infinitesimale Generator der Halbgruppe $\{T_t\}$ (oder: A erzeugt die Halbgruppe $\{T_t\}$).

Die für uns wichtigsten Aussagen über A und die stark stetige Halbgruppe $\{T_t\}$ haben wir im folgenden Satz zusammengestellt.

Satz 4.4

a) $D(A)$ ist ein in X dichter Teilraum und A ist linear auf $D(A)$.

b) A ist ein abgeschlossener Operator auf $D(A)$.

c) Für $x \in D(A)$ und $t \geq 0$ gilt:

$$A T_t x = T_t A x.$$

d) Die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = A u \quad u(0) = u_0 \in D(A)$$

ist die Abbildung $u(t) = T_t u_0$.

Bemerkung 4.5

Aus c) und der Bedingung iii) (Definition 4.1) erhält man sofort, daß die Abbildung $u(t) = T_t u_0$ sogar stetig differenzierbar ist. Benutzt man weiter die Abschätzung $\|T_t\| \leq M e^{\alpha t}$, so folgt für die Lösung $u(t)$:

$$\|u(t)\| \leq M \|u_0\| e^{\alpha t}.$$

Daraus ergibt sich unmittelbar:

- 1) Die Ruhelage $u \equiv 0$ ist stabil für $\alpha \leq 0$.
- 2) Die Ruhelage $u \equiv 0$ ist global asymptotisch stabil für $\alpha < 0$.

Für unsere Überlegungen benötigen wir weiter einen Spezialfall der stark stetigen Halbgruppen.

Definition 4.6

Sei $\{T_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von stetigen, linearen Abbildungen des Banachraumes X in sich. Sie heißt stark stetige Gruppe, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i) $T_0 = I$.
- ii) Für $t, s \in \mathbb{R}$ gilt: $T_{t+s} = T_t T_s$.
- iii) Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow T_t x \in X$$

stetig.

Bemerkung 4.7

Ist $\{T_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige Gruppe, so ist die Familie $\{T_t \mid t \geq 0\}$ eine stark stetige Halbgruppe und besitzt folglich einen infinitesimalen Generator A . Wir sagen dann, daß A die Gruppe $\{T_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ erzeugt.

Wegen ii) sind die Operatoren T_t für $t \geq 0$ invertierbar, und die Operatoren

$$S_t := T_t^{-1} = T_{-t}$$

bilden für $t \geq 0$ ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe. Diese wird vom Operator $-A$ erzeugt.

Als letztes geben wir einen Satz über die Vertauschbarkeit von Integration und abgeschlossenen Operatoren an. Wir legen dabei den Riemann'schen Integralbegriff zugrunde. Eine ausführliche Diskussion dieses Problemkreises findet sich bei Vainberg [40]. Ohne Beweis geben wir nur einige wichtige Eigenschaften an.

Satz 4.8

Sei $x : [a, b] \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Dann gilt:

a) Das Integral $\int_a^b x(t) dt$ existiert

$$b) \quad \left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt$$

c) Für $t \in [a, b]$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t x(s) ds \right) = x(t).$$

d) Ist x stetig differenzierbar, so ist:

$$\int_a^b x'(s) \, ds = x(b) - x(a).$$

e) Ist $x_n : [a,b] \rightarrow X$ eine Folge von stetigen Abbildungen, die gleichmäßig gegen x konvergiert, so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) \, dt = \int_a^b x(t) \, dt.$$

Wir kommen nun zu dem angekündigten Satz über die Vertauschbarkeit. Der Beweis dieses Satzes ist bei Ladas - Lakshmikantham [25] zu finden.

Satz 4.9

Sei $B : D(B) \rightarrow X$ ein abgeschlossener Operator mit $D(B) \subset X$. Die Abbildung

$$x : [a,b) \rightarrow X$$

sei gegeben und es gelte für $t \in [a,b)$:

$$x(t) \in D(B).$$

Weiter nehmen wir an, daß $Bx(t)$ auf dem Intervall $[a,b)$ stetig ist und daß die Integrale

$$\int_a^b x(t) \, dt \quad \text{und} \quad \int_a^b Bx(t) \, dt$$

existieren.

Dann ist

$$\int_a^b x(t) \, dt \in D(B)$$

und es gilt:

$$B \int_a^b x(t) \, dt = \int_a^b B x(t) \, dt.$$

Bemerkung 4.10

Im Satz 4.9 ist $b = \infty$ zugelassen. Ist das Intervall $[a, b]$ beschränkt und sind die Abbildungen $x(t)$ und $B x(t)$ auf $[a, b]$ stetig, so gilt die Behauptung von Satz 4.9, falls $x(t) \in D(B)$ ist.

§ 5 Die lineare, inhomogene Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au + p(t)$$

Gegenstand der Untersuchungen in diesem Abschnitt ist das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = Au + p(t) \quad u(t_0) = u_0, \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

Dabei erzeuge A die stark stetige Halbgruppe

$\{ T_t \mid t \geq 0 \}$, und es gelte die Abschätzung

$$\|T_t\| \leq M e^{\alpha t}$$

für $t \geq 0$. Die Existenz einer solchen Abschätzung ist nach Satz 4.2 gesichert. Weiterhin sei die Abbildung

$$p : [t_0, \infty) \rightarrow X$$

stetig. Unter diesen Voraussetzungen existiert für

$u_0 \in D(A)$ höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems.

Um dieses zu beweisen, ist das folgende triviale Lemma nötig.

Lemma 5.1

Sei $t_0 \geq 0$ und die Abbildung

$$p : [t_0, \infty) \rightarrow X$$

sei stetig. Dann ist für $t > t_0$ die Abbildung

$$\phi : [t_0, t] \ni s \rightarrow T_{t-s}p(s)$$

ebenfalls stetig.

Beweis:

Wir zeigen zuerst, daß die Abbildung

$$\phi_1 : [0, \infty) \times X \ni (s, x) \rightarrow T_s x$$

in jedem Punkt (s_1, x_1) stetig ist. Aus der Darstellung

$$T_s x - T_{s_1} x_1 = T_s (x - x_1) + (T_s - T_{s_1}) x_1$$

folgt die Abschätzung

$$\|\phi_1(s, x) - \phi_1(s_1, x_1)\| \leq M e^{\alpha s} \|x - x_1\| + \|T_s x_1 - T_{s_1} x_1\|.$$

Aus der Bedingung iii) von Definition 4.1 ergibt sich

dann die Stetigkeit von ϕ_1 . Da ferner die Abbildung

$$\phi_2 : [t_0, t] \ni s \rightarrow (t - s, p(s)) \in [0, \infty) \times X$$

ebenfalls stetig ist, gilt dies auch für

$$\phi = \phi_1 \circ \phi_2 . \quad \text{---}$$

Mit Hilfe von Lemma 5.1 beweisen wir den angekündigten Darstellungssatz, aus dem sich die Eindeutigkeit der Lösung sofort ergibt (vgl. Krein [24]).

Satz 5.2

Sei A der infinitesimale Generator der stark stetigen Halbgruppe $\{T_t \mid t \geq 0\}$, und die Abbildung

$$p : [t_0, \infty) \rightarrow X$$

sei stetig. Dann gilt:

a) Für $u_0 \in D(A)$ besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = A u + p(t) \quad u(t_0) = u_0, \quad t \geq t_0 \geq 0$$

höchstens eine Lösung.

b) Ist u Lösung des Anfangswertproblems, so folgt für

$$t \geq t_0 :$$

$$u(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds.$$

Beweis:

Offensichtlich folgt aus b) die Eindeutigkeit der Lösung.

Ist u eine Lösung des Problems, so gilt für $t \geq t_0$:

$$u(t) \in D(A).$$

Aus Satz 4.4 d) und der verallgemeinerten Kettenregel

(vgl. Dieudonné [10]) folgt dann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (T_{t-s} u(s)) &= -A T_{t-s} u(s) + T_{t-s} \dot{u}(s) \\ &= -A T_{t-s} u(s) + T_{t-s} (A u(s) + p(s)) = T_{t-s} p(s) \end{aligned}$$

für festes t und $s \in [t_0, t]$.

Da nach Lemma 5.1 der Integrand stetig ist, existiert nach Satz 4.8 a) das Integral

$$\int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds.$$

Weiter folgt mit Hilfe von Satz 4.8 d):

$$\int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds = \int_{t_0}^t \frac{d}{ds} (T_{t-s} u(s)) ds$$

$= u(t) - T_{t-t_0} u_0$. Damit ist die Behauptung b) bewiesen. —

Anders als im Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen reichen die Voraussetzungen von Satz 5.2 nicht aus, um die Existenz einer Lösung zu garantieren. Ausschlaggebend ist dabei, daß der Satz 5.2 für eine konstante $n \times n$ Matrix trivial ist. Für unser Problem benötigen wir weitere Voraussetzungen über p . Diese sind im folgenden Satz formuliert (vgl. Carroll [5.]).

Satz 5.3

A und p seien wie in Satz 5.2 gegeben. Ferner genüge p einer der folgenden Bedingungen:

- a) Für $t \geq t_0$ ist $p(t) \in D(A)$ und die Abbildung $A p(t)$ ist stetig in t .
- b) p ist stetig differenzierbar.

Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = Au + p(t) \quad u(t_0) = u_0$$

für $u_0 \in D(A)$ genau eine Lösung. Diese besitzt die in Satz 5.2 angegebene Darstellung.

Beweis:

Nach Satz 5.2 reicht es, zu zeigen, daß die Funktion

$$u(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds$$

Lösung des Problems ist.

Offensichtlich ist $u(t_0) = u_0$. Weiter gilt nach Satz 4.4 d):

$$\frac{d}{dt} (T_{t-t_0} u_0) = A (T_{t-t_0} u_0).$$

Folglich müssen wir nur noch zeigen, daß die Abbildung

$$F: [t_0, \infty) \ni t \rightarrow \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds$$

eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{u} = Au + p(t)$ ist.

- a) Da für $s \geq t_0$ nach Voraussetzung $p(s) \in D(A)$ ist, folgt mit Hilfe von Satz 4.4 c) für $t_0 \leq s \leq t \leq \tau$:

$$T_{\tau-s} p(s) \in D(A)$$

$$\text{und} \quad A T_{\tau-s} p(s) = T_{\tau-s} A p(s).$$

Damit ist nach Voraussetzung die Abbildung

$$A T_{\tau-s} p(s)$$

stetig für $s \in [t_0, t]$. Somit ergeben sich aus

Satz 4.9 die Folgerungen:

$$\int_{t_0}^t T_{\tau-s} p(s) ds \in D(A)$$

$$\text{und} \quad A \int_{t_0}^t T_{\tau-s} p(s) ds = \int_{t_0}^t A T_{\tau-s} p(s) ds.$$

Definiert man für $t_0 \leq t \leq \tau$ die Abbildung

$$G(t, \tau) := \int_{t_0}^t T_{\tau-s} p(s) ds,$$

so ist $F(t) = G(t, t)$. Nach Satz 4.8 c) ist G nach t stetig partiell differenzierbar, und es gilt:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, \tau) = T_{\tau-t} p(t).$$

Weiter ist der Integrand von G partiell nach τ integrierbar und besitzt die stetige Ableitung

$$A T_{\tau-s} p(s).$$

Somit erhält man für die partielle Ableitung von G nach τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \tau}(t, \tau) &= \int_{t_0}^t A T_{\tau-s} p(s) ds \\ &= A \int_{t_0}^t T_{\tau-s} p(s) ds. \end{aligned}$$

Aus der Kettenregel ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\partial G}{\partial \tau}(t, t) + \frac{\partial G}{\partial t}(t, t) \\ &= A \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds + p(t) \\ &= A F(t) + p(t). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt.

b) Ist p stetig differenzierbar, so gilt nach Satz 4.8 d):

$$p(s) = p(t_0) + \int_{t_0}^s p'(\xi) d\xi.$$

Daraus folgt zunächst die Darstellung

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds \\ &= \int_{t_0}^t T_{t-s} p(t_0) ds + \int_{t_0}^t T_{t-s} \left[\int_{t_0}^s p'(\xi) d\xi \right] ds \\ &= \int_{t_0}^t T_{t-s} p(t_0) ds + \int_{t_0}^t \left[\int_s^t T_{t-\xi} p'(s) d\xi \right] ds. \end{aligned}$$

Wir wollen zuerst zeigen, daß für $t \geq t_0$

$F(t) \in D(A)$ ist. Nach Satz 4.4 und Satz 4.9 ist für

$x \in D(A)$ und $t_1 \leq t_2$ stets

$$\int_{t_1}^{t_2} T_t x dt \in D(A),$$

und es gilt:

$$T_{t_2} x - T_{t_1} x = A \int_{t_1}^{t_2} T_t x dt = \int_{t_1}^{t_2} A T_t x dt.$$

Ist nun $x \in X$, so existiert eine Folge

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(A) \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt dann:

$$v_n := \int_{t_1}^{t_2} T_t x_n dt \in D(A).$$

Ferner folgt aus Satz 4.8 e):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \int_{t_1}^{t_2} T_t x \, dt.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} T_{t_2} x - T_{t_1} x &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(T_{t_2} x_n - T_{t_1} x_n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} A \int_{t_1}^{t_2} T_t x_n \, dt = \lim_{n \rightarrow \infty} A v_n. \end{aligned}$$

Da A abgeschlossen ist, folgt somit für $x \in X$ und $t_1 = t_2$:

$$(5.3.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} T_t x \, dt \in D(A).$$

Damit ist für $t = t_0$ die Beziehung

$$\int_{t_0}^t T_{t-s} p(t_0) \, ds \in D(A)$$

bewiesen, und weiter gilt:

$$\begin{aligned} A \left[\int_{t_0}^t T_{t-s} p(t_0) \, ds \right] &= A \left[\int_0^{t-t_0} T_s p(t_0) \, ds \right] \\ &= T_{t-t_0} p(t_0) - p(t_0). \end{aligned}$$

Definieren wir die Funktion

$$g: [t_0, t] \ni s \rightarrow \int_s^t T_{t-s} p'(s) \, d\xi,$$

so ist nach (5.3.1) für $t_0 \leq s \leq t$

$$g(s) = \int_0^{t-s} T_\xi p'(s) \, d\xi \in D(A).$$

Daraus ergibt sich

$$A g(s) = T_{t-s} p'(s) - p'(s),$$

und aus Satz 4.9 folgt:

$$\int_{t_0}^t g(s) \, ds \in D(A).$$

Damit ist für $t \geq t_0$ die Beziehung $F(t) \in D(A)$ bewiesen. Weiterhin gilt:

$$A F(t) = A \left(\int_{t_0}^t T_{t-s} p(t_0) \, ds + \int_{t_0}^t g(s) \, ds \right)$$

$$= T_{t-t_0} p(t_0) - p(t_0) + \int_{t_0}^t A g(s) \, ds$$

$$= T_{t-t_0} p(t_0) - p(t_0)$$

$$+ \int_{t_0}^t T_{t-s} p'(s) \, ds - \int_{t_0}^t p'(s) \, ds$$

$$= -p(t) + T_{t-t_0} p(t_0) + \int_{t_0}^t T_{t-s} p'(s) \, ds.$$

Andererseits gilt wegen

$$F(t) = \int_0^{t-t_0} T_{\xi} p(t-\xi) d\xi$$

für die Ableitung:

$$\begin{aligned} F'(t) &= T_{t-t_0} p(t_0) + \int_0^{t-t_0} T_{\xi} p'(t-\xi) d\xi \\ &= T_{t-t_0} p(t_0) + \int_{t_0}^t T_{t-s} p'(s) ds \\ &= A F(t) + p(t). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. —

Bemerkung

Die Voraussetzungen an p lassen sich abschwächen, wenn man verlangt, daß A eine analytische Halbgruppe erzeugt. In diesem Fall reicht es, Hölder-Stetigkeit für p zu fordern (vgl. Kato [20]).

Nachdem wir uns mit der Lösbarkeit der inhomogenen Gleichung beschäftigt haben, wollen wir im Anschluß daran das Verhalten der Lösungen untersuchen. Wir wenden uns zunächst den beschränkten Lösungen zu. Der erste Satz gibt hinreichende Bedingungen an, die die Beschränktheit aller Lösungen der inhomogenen Gleichung garantieren. Die Bedingungen für die Abbildung p stimmen mit denen für gewöhnliche Differentialgleichungen bekannten überein.

Satz 5.4

Genügen A und p den Bedingungen in Satz 5.2, so ist jede Lösung der inhomogenen Gleichung beschränkt, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- a) $\alpha \leq 0$ und $\int_{t_0}^{\infty} \|p(t)\| dt < \infty$,
- b) $\alpha < 0$ und $\sup_{t \geq t_0} \|p(t)\| < \infty$.

Beweis:

Zur Abschätzung der Lösung $u(t)$ mit $u(t_0) = u_0$ benutzen wir die in Satz 5.2 b) angegebene Darstellung.

a) Wegen $\alpha \leq 0$ gilt $M e^{\alpha t} \leq M$ und folglich für $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq M \left(\|u_0\| + \int_{t_0}^t \|p(s)\| ds \right) \\ &\leq M \left(\|u_0\| + \int_{t_0}^{\infty} \|p(s)\| ds \right). \end{aligned}$$

b) Ist $\alpha < 0$, so ist für $t \geq t_0$ das Integral

$$\int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} ds$$

durch $|\alpha|^{-1}$ nach oben beschränkt. Daraus folgt für $t \geq t_0$ die Abschätzung (5.4.1):

$$\|u(t)\| \leq M \left(\|u_0\| + |\alpha|^{-1} \sup_{s \geq t_0} \|p(s)\| \right).$$

Die Voraussetzung $\alpha \leq 0$ bewirkt, daß jede Lösung der homogenen Gleichung beschränkt ist (vgl. Bemerkung 4.5). Durch geschickte Wahl von p läßt sich aber selbst in dem Fall, daß die Lösungen der homogenen Gleichung sämtlich unbeschränkt sind, die Existenz genau einer beschränkten Lösung der inhomogenen Gleichung erzwingen. Im Fall der gewöhnlichen Differentialgleichungen entspricht dies einem von Massera-Schäfer [32] erzielten Ergebnis.

Satz 5.5

A erzeuge die stark stetige Gruppe $\{ T_t \mid t \in \mathbb{R} \}$, und für $t \leq 0$ gelte die Abschätzung

$$\|T_t\| \leq M e^{\alpha t}$$

mit $\alpha > 0$. Die Abbildung p genüge einer der beiden Voraussetzungen in Satz 5.3 und zusätzlich sei entweder

$$\sup_{t \geq t_0} \|p(t)\| < \infty \quad \text{oder} \quad \int_{t_0}^{\infty} \|p(t)\| dt < \infty \quad \text{erfüllt.}$$

Ist weiter das Element $\int_{t_0}^{\infty} T_{t_0-s} p(s) ds \in D(A)$, so

existiert genau eine beschränkte Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis:

Da nach Voraussetzung das Element

$$u_0 := - \int_{t_0}^{\infty} T_{t_0-s} p(s) ds$$

in $D(A)$ liegt, existiert nach Satz 5.3 genau eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit $u(t_0) = u_0$.

Nach Satz 5.2 b) besitzt u die Darstellung:

$$\begin{aligned} u(t) &= T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds \\ &= -T_{t-t_0} \left(\int_{t_0}^{\infty} T_{t_0-s} p(s) ds \right) + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds. \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, daß u beschränkt ist. Dazu beweisen wir zuerst, daß für jedes $t \geq t_0$ der lineare, beschränkte Operator T_{t-t_0} mit dem uneigentlichen Integral vertauschbar ist. Nach Satz 4.9 ist dafür die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{t_0}^{\infty} T_{t-s} p(s) ds$$

hinreichend.

Seien t und T reelle Zahlen mit $t_0 \leq t \leq T$. Dann gilt:

$$\left\| \int_t^T T_{t-s} p(s) ds \right\| \leq M \int_t^T e^{\alpha(t-s)} \|p(s)\| ds.$$

Daraus ergeben sich unmittelbar zwei Folgerungen:

i) Ist $\sup_{s \geq t_0} \|p(s)\| < \infty$, so folgt für $T \geq t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^T T_{t-s} p(s) ds \right\| &\leq \int_t^T \|T_{t-s} p(s)\| ds \\ &\leq \frac{M}{\alpha} \sup_{s \geq t} \|p(s)\| \leq \frac{M}{\alpha} \sup_{s \geq t_0} \|p(s)\|. \end{aligned}$$

ii) Gilt $\int_{t_0}^{\infty} \|p(s)\| ds < \infty$, so folgt für $T \geq t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^T T_{t-s} p(s) ds \right\| &\leq \int_t^T \|T_{t-s} p(s)\| ds \\ &\leq M \int_t^{\infty} \|p(s)\| ds \leq M \int_{t_0}^{\infty} \|p(s)\| ds. \end{aligned}$$

Somit existiert für jedes $t \geq t_0$ das uneigentliche Integral

$$\int_t^{\infty} T_{t-s} p(s) ds, \quad (5.5.1)$$

und ferner gilt:

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \int_t^{\infty} T_{t-s} p(s) ds \right\| < \infty. \quad (5.5.2)$$

Sei nun $t \geq t_0$ fest vorgegeben. Dann gilt für $T \geq t$:

$$\int_{t_0}^T T_{t-s} p(s) ds = \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds + \int_t^T T_{t-s} p(s) ds.$$

Daraus folgt zusammen mit (5.5.1) die Existenz des uneigentlichen Integrals:

$$\int_{t_0}^{\infty} T_{t-s} p(s) ds.$$

Somit besitzt die Lösung $u(t)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} u(t) &= - \int_{t_0}^{\infty} T_{t-s} p(s) ds + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds \\ &= - \int_t^{\infty} T_{t-s} p(s) ds, \end{aligned}$$

und wegen (5.5.2) gilt:

$$\sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß u die einzige beschränkte Lösung der inhomogenen Gleichung ist. Sei dazu v eine weitere Lösung der inhomogenen Gleichung mit

$$\sup_{t \geq t_0} \|v(t)\| < \infty.$$

Dann ist die Differenz $w(t) := u(t) - v(t)$ Lösung des Anfangswertproblems:

$$\dot{w} = Aw \quad w(t_0) = u_0 - v(t_0), \quad t \geq t_0.$$

Ferner gilt: $\sup_{t \geq t_0} \|w(t)\| < \infty.$

Setzt man $w_0 := u_0 - v(t_0)$, so erhält man mittels Satz 5.2 b) die Darstellung:

$$w(t) = T_{t-t_0} w_0.$$

Aus der Bedingung ii) (Definition 4.6) und der vorausgesetzten Abschätzung für $\|T_s\|$ ($s \leq 0$) ergibt sich für $t \geq t_0$:

$$\|w(t)\| \geq \|T_{-(t-t_0)}\|^{-1} \|w_0\| \geq \frac{1}{M} e^{\alpha(t-t_0)} \|w_0\|.$$

Da $\alpha > 0$ und w beschränkt ist, folgt aus dieser Abschätzung:

$$w_0 = 0.$$

Daraus erhält man sofort: $w(t) = u(t) - v(t) \equiv 0$.

Damit ist u die einzige beschränkte Lösung der inhomogenen Gleichung. —

Die beschränkte Lösung besitzt eine weitere Eigenschaft, die sich leicht beweisen läßt.

Korollar 5.6

Gilt entweder $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t)\| = 0$ oder $\int_{t_0}^{\infty} \|p(t)\| dt < \infty$,

so erfüllt die nach Satz 5.5 eindeutig bestimmte beschränkte Lösung die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

Aus den Abschätzungen i) und ii) im Beweis von Satz 5.5 erhält man für $t \geq t_0$ entweder

$$\|u(t)\| \leq \frac{M}{\alpha} \sup_{s \geq t} \|p(s)\|$$

oder

$$\|u(t)\| \leq M \int_t^{\infty} \|p(s)\| ds.$$

Aus beiden Ungleichungen folgt sofort die Behauptung. —

Die im Satz 5.5 für p geforderten Eigenschaften stimmen bis auf die Bedingung

$$\int_{t_0}^{\infty} T_{t_0-s} p(s) ds \in D(A)$$

mit den für gewöhnliche Differentialgleichungen bekannten überein. Ist A eine konstante, quadratische Matrix, so ist die obige Bedingung trivialerweise erfüllt. Wir wollen an einem Beispiel zeigen, wie sich im allgemeinen die Bedingungen für p erfüllen lassen.

Beispiel 5.7

A erfülle die Voraussetzung von Satz 5.5. Für $\lambda \geq 0$ und $x \in D(A)$ definieren wir die Abbildung

$$p: [t_0, \infty) \ni t \rightarrow e^{-\lambda t} x \in X.$$

Dann existiert genau eine beschränkte Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au + p(t).$$

Ist $\lambda > 0$, so gilt für diese Lösung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

Da p stetig differenzierbar und $\sup_{t \geq t_0} \|p(t)\| < \infty$ ist,

bleibt nach Satz 5.5 nur noch zu zeigen:

$$\int_{t_0}^{\infty} T_{t_0-t} e^{-\lambda t} x \, dt \in D(A).$$

Für $t \geq 0$ bilden die Operatoren

$$S_t := T_{-t}$$

eine stark stetige Halbgruppe mit der Eigenschaft:

$$\|S_t\| \leq M e^{-\alpha t}.$$

Gemäß Satz 4.2 existiert der Grenzwert

$$\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|S_t\|}{t},$$

und es gilt: $\omega_0 \leq -\alpha < 0$. Dann folgt für jedes

$\lambda \geq 0 > \omega_0$ (s. Dunford-Schwartz [11])

$$\int_0^{\infty} S_t e^{-\lambda t} x \, dt \in D(A).$$

Wegen der Beziehung

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{\infty} T_{t_0-s} e^{-\lambda s} x \, ds &= \int_{t_0}^{\infty} S_{s-t_0} e^{-\lambda s} x \, ds \\ &= e^{-\lambda t_0} \int_0^{\infty} S_t e^{-\lambda t} x \, dt \in D(A) \end{aligned}$$

ist damit die Existenz genau einer beschränkten Lösung bewiesen. Ist $\lambda > 0$, so folgt wegen $\lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t)\| = 0$ die zweite Behauptung aus Korollar 5.6. —

Die Voraussetzungen für p in Korollar 5.6 bewirkten, daß die eindeutig bestimmte beschränkte Lösung gegen den Ursprung konvergierte. Ist $\alpha < 0$, so gilt das (unter den gleichen Bedingungen für p) für alle Lösungen der inhomogenen Gleichung. Für gewöhnliche Differentialgleichungen wurde dieses Resultat von Brauer [3] bewiesen.

Satz 5.8

A und p mögen die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllen. Ist $\alpha < 0$ und gilt eine der folgenden Bedingungen

$$\text{a) } \lim_{t \rightarrow \infty} \|p(t)\| = 0 \qquad \text{b) } \int_{t_0}^{\infty} \|p(t)\| \, dt < \infty ,$$

so folgt für jede Lösung der inhomogenen Gleichung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

Nach Satz 5.2 erhalten wir die Abschätzung

$$\|u(t)\| \leq M \left[e^{\alpha(t-t_0)} \|u_0\| + \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \|p(\tau)\| d\tau \right].$$

Da aus den Bedingungen a) und b) jeweils

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-\tau)} \|p(\tau)\| d\tau = 0$$

folgt (vgl. Reißig-Sansone-Conti [39]), ergibt sich die Behauptung. —

§ 6 Lineare Gleichungen mit nicht-linearen

Dauerstörungen

In diesem Abschnitt behandeln wir nicht-lineare Anfangswertprobleme des Typs:

$$(6.0.1) \quad \dot{u} = Au + f(t, u) \quad u(t_0) = u_0, \quad t \geq t_0.$$

Wir setzen wiederum voraus, daß der Operator A die stark stetige Halbgruppe $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$ erzeugt, für die die Abschätzung

$$\|T_t\| \leq M e^{at}$$

gilt. Wie in § 5 behandeln wir zuerst das Problem der Existenz, Eindeutigkeit und Darstellung der Lösung. Der erste Satz gibt unter recht allgemeinen Voraussetzungen eine Darstellung der Lösung an (vgl. Carroll [5]).

Satz 6.1

Die Abbildung

$$f : [t_0, \infty) \times X \rightarrow X$$

sei stetig. Ferner sei u eine Lösung des Anfangswertproblems (6.0.1). Dann gilt für $t \geq t_0$:

$$u(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) ds.$$

Beweis:

Definieren wir die Abbildung

$$p : [t_0, \infty) \ni t \rightarrow f(t, u(t)) \in X,$$

so ist sie wegen der Stetigkeit von f und u ebenfalls stetig. Ferner löst u das Anfangswertproblem:

$$\dot{u} = Au + p(t) \quad u(t_0) = u_0 \quad t \geq t_0.$$

Daraus folgt nach Satz 5.2 b) für $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} u(t) &= T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds \\ &= T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) ds. \quad \text{---} \end{aligned}$$

Anders als im Fall der inhomogenen Gleichung (Satz 5.2) ist hier mit der Darstellungsformel keine Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung verbunden. Der nächste Satz liefert eine hinreichende Bedingung dafür.

Satz 6.2

Die Abbildung $f : [t_0, \infty) \times X \rightarrow X$ sei stetig und genüge mit $\gamma \in C([t_0, \infty))$ für $t \geq t_0$ und $u, v \in X$ der Lipschitz-Bedingung:

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq \gamma(t) \|u - v\|.$$

Dann gilt:

a) Sind u und v zwei Lösungen der Gleichung

$$\dot{u} = Au + f(t, u) \quad t \geq t_0$$

dann ist für $t \geq t_0$ die Abschätzung

$$\|u(t) - v(t)\| \leq M \|u(t_0) - v(t_0)\| \exp \left[\int_{t_0}^t (\alpha + M\gamma(s)) ds \right]$$

b) Das Anfangswertproblem (6.0.1) besitzt höchstens eine Lösung.

Beweis:

Offenbar folgt die Aussage b) sofort aus a). Für den Beweis von a) benutzen wir die Darstellung aus Satz 6.1.

Wir erhalten für $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} u(t) - v(t) &= T_{t-t_0} (u(t_0) - v(t_0)) \\ &+ \int_{t_0}^t T_{t-s} \left(f(s, u(s)) - f(s, v(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Auf Grund der Abschätzung für $\|T_t\|$ und der Lipschitz-Bedingung für f liefert dies:

$$\begin{aligned} \|u(t) - v(t)\| &\leq M e^{\alpha(t-t_0)} \|u(t_0) - v(t_0)\| \\ &+ \int_{t_0}^t M e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) \|u(s) - v(s)\| ds. \end{aligned}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $e^{-\alpha t}$ und wenden das Gronwallsche Lemma an, so erhält man für $t \geq t_0$:

$$e^{-\alpha t} \|u(t) - v(t)\| \leq M e^{-\alpha t_0} \|u(t_0) - v(t_0)\| \exp \int_{t_0}^t M \gamma(s) ds.$$

Durch Multiplikation mit $e^{\alpha t}$ folgt daraus unmittelbar die Behauptung. —

Um die Existenz einer Lösung nachzuweisen, ist jedoch die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit zu schwach. Zwar existiert unter dieser Voraussetzung genau eine Lösung der in Satz 6.1 angegebenen Integralgleichung (s. Lemma 6.4), jedoch ist diese nicht unbedingt auch Lösung der Differentialgleichung. Wir benötigen dazu weitere Voraussetzungen für f .

Als Hilfsmittel für Existenzaussagen benutzen wir das folgende Lemma, das ein modifiziertes Verfahren der sukzessiven Approximation zum Inhalt hat. Mit $C_X[t_0, T]$ bezeichnen wir den Vektorraum aller stetigen Abbildungen

$$u : [t_0, T] \rightarrow X.$$

Versehen wir den Raum mit der Supremumsnorm

$$\|u\| := \sup \{ \|u(t)\| \mid t_0 \leq t \leq T \},$$

so ist $C_X[t_0, T]$ ein Banachraum. Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir das angekündigte Lemma.

Lemma 6.3

Für $k \geq 0$ seien die Abbildungen p_k und v_0 aus $C_X [t_0, T]$. Es mögen reelle Zahlen a und b existieren, so daß für $k \geq 0$ und $t \in [t_0, T]$

$$\|p_{k+1}(t) - p_k(t)\| \leq a \frac{(b(t-t_0))^{k+2}}{(k+2)!}$$

gilt. Weiter existiere eine Konstante $c > 0$, so daß die stetige Abbildung

$$h : [0, T] \times [t_0, T] \times X \rightarrow X$$

für alle $t \in [0, T]$, alle $s \in [t_0, T]$ und alle Elemente $v, w \in X$ die Abschätzung

$$\|h(t, s, v) - h(t, s, w)\| \leq c \|v - w\|$$

erfüllt.

Schließlich definieren wir für $k \geq 0$ rekursiv die Abbildungen

$$v_{k+1} : [t_0, T] \ni t \rightarrow \int_{t_0}^t h(t-s, s, v_k(s)) ds + p_k(t).$$

Dann gilt:

$(v_k)_{k \geq 0}$ ist eine Cauchyfolge in $C_X [t_0, T]$.

Beweis:

Da die Abbildungen p_k , h und v_0 stetig sind, gilt dies auch für die rekursiv definierten Abbildungen v_k ($k \geq 1$).

Wir führen die Bezeichnungen

$$d := \sup \{ \|h(t, s, v_0(s))\| \mid 0 \leq t \leq T, t_0 \leq s \leq T \}$$

und

$$l := \|p_0 - v_0\|$$

ein und beweisen die folgende Ungleichung durch vollständige Induktion:

Für $k \geq 0$ und $t_0 \leq t \leq T$ gilt die Beziehung (6.3.1):

$$\|v_{k+1}(t) - v_k(t)\|$$

$$\leq (a + d c^{-1}) (b + c)^{k+1} \frac{(t - t_0)^{k+1}}{(k+1)!} + l \frac{[c(t - t_0)]^k}{k!}.$$

Für $k = 0$ und $t_0 \leq t \leq T$ gilt:

$$\|v_1(t) - v_0(t)\| \leq \int_{t_0}^t \|h(t-s, s, v_0(s))\| ds + \|p_0(t) - v_0(t)\|$$

$$\leq d(t - t_0) + l \leq (a + d c^{-1}) (b + c) (t - t_0) + l,$$

und der Induktionsanfang ist bewiesen. Unter Voraussetzung von (6.3.1) für den Index k erhält man für $k+1$:

$$\begin{aligned}
 & \|v_{k+2}(t) - v_{k+1}(t)\| \\
 & \leq c \int_{t_0}^t \|v_{k+1}(s) - v_k(s)\| ds + \|p_{k+1}(t) - p_k(t)\| \\
 & \leq (a + d c^{-1}) (b+c)^{k+1} c \frac{(t-t_0)^{k+2}}{(k+2)!} + 1 \frac{(c(t-t_0))^{k+1}}{(k+1)!} \\
 & + a \frac{(b(t-t_0))^{k+2}}{(k+2)!} \\
 & = \frac{(t-t_0)^{k+2}}{(k+2)!} \left[(a + d c^{-1}) (b+c)^{k+1} \cdot c + a b^{k+2} \right] \\
 & + 1 \frac{(c(t-t_0))^{k+1}}{(k+1)!} \\
 & = (a + d c^{-1}) (b+c)^{k+2} \frac{(t-t_0)^{k+2}}{(k+2)!} + 1 \frac{(c(t-t_0))^{k+1}}{(k+1)!} .
 \end{aligned}$$

Damit ist die Formel (6.3.1) bewiesen.

Sei nun $k \geq 0$ und $\rho \geq 0$. Dann erhält man aus (6.3.1) durch einfache Abschätzung für $t_0 \leq t \leq T$:

$$\begin{aligned}
 \|v_{k+\rho}(t) - v_k(t)\| & \leq \sum_{v=0}^{\rho-1} \|v_{k+v+1}(t) - v_{k+v}(t)\| \\
 & \leq (a + d c^{-1}) \sum_{v=k+1}^{\infty} \frac{((b+c)(t-t_0))^v}{v!} + 1 \sum_{v=k}^{\infty} \frac{(c(t-t_0))^v}{v!} .
 \end{aligned}$$

Aus dieser Abschätzung erhält man sofort, daß die Folge $(v_k)_{k \geq 0}$ eine Cauchyfolge in $C_X[t_0, T]$ ist. —

Mittels dieses Lemmas ergibt sich recht einfach die eindeutige Lösbarkeit der in Satz 6.1 angegebenen Integralgleichung.

Lemma 6.4

Sei $\{T_t \mid t \geq 0\}$ eine stark stetige Halbgruppe, und die Abbildung f genüge den Voraussetzungen von Satz 6.2. Dann existiert zu jedem $u_0 \in X$ genau eine stetige Funktion

$$u : [t_0, \infty) \rightarrow X$$

mit

$$u(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) \, ds.$$

Beweis:

Die in Satz 6.2 a) angegebene Ungleichung liefert sofort, daß die Integralgleichung höchstens eine Lösung besitzt.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n > t_0$. Für $v \in C_X[t_0, n]$ definieren wir die Abbildung

$$F_n v: [t_0, n] \ni t \rightarrow T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, v(s)) \, ds.$$

Dann gilt: $F_n: C_X[t_0, n] \rightarrow C_X[t_0, n]$. Für zwei Elemente $v_1, v_2 \in C_X[t_0, n]$ erhält man:

$$\begin{aligned} & \|F_n v_1 - F_n v_2\| \\ &= \sup_{t_0 \leq t \leq n} \left\| \int_{t_0}^t T_{t-s} \left(f(s, v_1(s)) - f(s, v_2(s)) \right) ds \right\| \\ &\leq (n-t_0) \sup_{\substack{t_0 \leq t \leq n \\ 0 \leq s \leq n}} (\|T_s\| \vee(t)) \|v_1 - v_2\|. \end{aligned}$$

Damit ist F_n eine stetige Abbildung.

Sei $\bar{u}_0: [t_0, n] \ni t \rightarrow T_{t-t_0} u_0$, und definiere für $k \geq 0$ rekursiv die Funktionen

$$u_{k+1} = F_n u_k.$$

Setzen wir für $t \in [0, n]$, $s \in [t_0, n]$ und $x \in X$

$$h(t, s, x) := T_t f(s, x),$$

und definieren für $k \geq 0$ die Abbildungen

$$p_k: [t_0, n] \ni t \rightarrow \bar{u}_0(t),$$

so sind die Voraussetzungen von Lemma 6.3 erfüllt, und es folgt:

$(u_k)_{k \geq 0}$ ist eine Cauchyfolge in $C_X[t_0, n]$.

Da der Raum $C_X [t_0, n]$ vollständig ist, existiert eine Abbildung $u^{(n)} \in C_X [t_0, n]$ mit

$$u^{(n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k.$$

Aus der Stetigkeit von F_n ergibt sich dann:

$$u^{(n)} = \lim_{k \rightarrow \infty} u_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} F_n u_k = F_n \left(u^{(n)} \right).$$

Damit löst $u^{(n)}$ auf dem Intervall $[t_0, n]$ die Integralgleichung. Wieder zeigt die Ungleichung aus Satz 6.2 a), daß auf dem Intervall $[t_0, n]$ höchstens eine Lösung existiert. Somit besitzt die Abbildung F_n genau einen Fixpunkt.

Wir definieren nun die Abbildung

$$u : [t_0, \infty) \rightarrow X$$

durch $u(t) := u^{(n)}(t)$ für $t \leq n$. Die Definition ist sinnvoll, da für $t \leq n$ und $k \geq n$

$$u^{(k)}(t) = u^{(n)}(t)$$

gilt. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeit des Fixpunktes der Abbildung F_n . Ferner ist u eine stetige Abbildung.

Sei nun $t \geq t_0$ fest vorgegeben. Dann existiert eine natürliche Zahl n_0 mit $t \leq n_0$, und es gilt:

$$\begin{aligned} u(t) &= u^{(n_0)}(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u^{(n_0)}(s)) ds \\ &= T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Damit löst u die Integralgleichung, und das Lemma ist bewiesen. —

Bemerkung 6.5

Für die zur Konstruktion des Fixpunktes benutzte Folge $(u_k)_{k \geq 0}$ können wir noch eine im folgenden benötigte Abschätzung herleiten. Da die Folge $(p_k)_{k \geq 0}$ in Lemma 6.4

konstant ist, können wir in der Formel (6.3.1) $a=b=0$ setzen. Außerdem ist $p_0 = \bar{u}_0$, so daß auch $l=0$ ist.

Wir erhalten damit für $t_0 \leq t \leq n$ und $k \geq 0$ die Abschätzung (6.5.1)

$$\|u_{k+1}'(t) - u_k'(t)\| \leq d c^{-1} \frac{(c(t-t_0))^{k+1}}{(k+1)!}$$

mit $c := \sup \{\|T_s\| \gamma(t) \mid t_0 \leq t \leq n, 0 \leq s \leq n\}$

und $d := \sup \{\|T_t f(s, \bar{u}_0(s))\| \mid 0 \leq t \leq n, t_0 \leq s \leq n\}.$

Das Problem der Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems ist mit Lemma 6.4 aber noch nicht gelöst. Können wir zeigen, daß mit der Lösung $u(t)$ der Integralgleichung die Abbildung

$$F(t) := \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) \, ds$$

eine Lösung der Differentialgleichung $\dot{u} = Au + f(t, u)$ ist, so ist das Anfangswertproblem (6.0.1) für $u_0 \in D(A)$ eindeutig lösbar. Setzen wir

$$p(t) := f(t, u(t)),$$

so liefert der Satz 5.3 zwei hinreichende Bedingungen dafür. Dabei ist die Bedingung b) (p stetig differenzierbar) unbrauchbar, da nur die Stetigkeit von u gesichert ist. Die erste Bedingung liefert dagegen den folgenden einfachen Satz.

Satz 6.6

A erzeuge die stark stetige Halbgruppe $\{T_t \mid t \geq 0\}$, und f genüge der Lipschitz-Bedingung aus Satz 6.2. Für eine beliebige stetige Funktion $v: [t_0, \infty) \rightarrow X$ definiere man die Abbildung

$$p: [t_0, \infty) \ni t \rightarrow f(t, v(t)) \in X.$$

Ist dann stets $p(t) \in D(A)$ und $Ap(t)$ stetig in t , so existiert zu $u_0 \in D(A)$ genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{u} = Au + f(t, u) \quad u(t_0) = u_0.$$

Beweis:

Nach Satz 6.2 besitzt das Anfangswertproblems höchstens eine Lösung. Nach Lemma 6.4 existiert genau eine stetige Abbildung u mit

$$u(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) ds$$

für $t \geq t_0$. Offensichtlich ist $u(t_0) = u_0$, und der erste Summand genügt für $u_0 \in D(A)$ der homogenen Gleichung $\dot{u} = Au$ (s. Satz 4.4 d). Definieren wir dann $p(t) = f(t, u(t))$, so genügt p der Voraussetzung von Satz 5.3 a), und die Abbildung

$$F(t) = \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds$$

genügt der Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au + p(t) = Au + f(t, u).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. —

Auch die in Satz 6.6 angegebenen Bedingungen sind noch recht einschneidend. Wir wollen beweisen, daß es in einfachen Fällen möglich ist, stetig differenzierbare Fixpunkte der Integralgleichung zu finden. Wir könnten dann die Aussage von Satz 5.3 b) ausnutzen.

Satz 6.7

Der lineare Operator A erzeuge die stark stetige Halbgruppe $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$, und die Abbildungen

$$\lambda : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu : [t_0, \infty) \rightarrow X$$

seien stetig differenzierbar. Ferner sei B eine stetige, lineare Abbildung von X in sich. Dann ist für $u_0 \in D(A)$ das Anfangswertproblem

$$\dot{u} = Au + \lambda(t) Bu + \mu(t), u(t_0) = u_0$$

eindeutig lösbar.

Beweis:

Setzen wir $f(t, u) = \lambda(t) Bu + \mu(t)$, so erfüllt f die Lipschitz-Bedingung aus Satz 6.2 mit $\gamma(t) = |\lambda(t)| \|B\|$. Daraus folgt, daß höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.

Nach Lemma 6.4 existiert genau eine stetige Funktion $u: [t_0, \infty) \rightarrow X$ mit

$$u(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s, u(s)) ds.$$

Wir wollen zuerst zeigen, daß diese Abbildung stetig differenzierbar ist.

Sei $[t_0, n]$ ein beliebiges Intervall mit $n \in \mathbb{N}$ und $n > t_0$. Dann existiert gemäß Lemma 6.4 eine Folge

$$(u_k)_{k=0} \subset C_X[t_0, n] \text{ mit den folgenden Eigenschaften}$$

für $k \geq 0$:

$$i) \quad \bar{u}_0(t) = T_{t-t_0} u_0$$

$$ii) \quad u_{k+1}(t) = T_{t-t_0} u_0 + \int_{t_0}^t T_{t-s} \left\{ \lambda(s) B u_k(s) + \mu(s) \right\} ds$$

$$iii) \quad u = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$$

Sind die Abbildungen u_k stetig differenzierbar, und ist die Folge $(\dot{u}_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Cauchyfolge in $C_X[t_0, n]$, so

ist u stetig differenzierbar in $[t_0, n]$ (vgl. Dieudonné [10]). Somit wäre u für $t \geq t_0$ stetig differenzierbar.

Da $u_0 \in D(A)$ ist, folgt die stetige Differenzierbarkeit von $\bar{u}_0$. Ist u_k stetig differenzierbar, so gilt dies auch für die Abbildung

$$[t_0, n] \ni t \rightarrow \lambda(t) B u_k(t) + \mu(t).$$

Damit ist auch u_{k+1} stetig differenzierbar (s. Beweis zu Satz 5.3 b).

Somit gilt für $k \geq 0$: $\dot{u}_k \in C_X[t_0, n]$. Für $k \geq 0$ erhält man mittels der Kettenregel die Rekursionsformel:

$$\dot{u}_0(t) = A T_{t-t_0} u_0$$

$$\dot{u}_{k+1}(t)$$

$$= A T_{t-t_0} u_0 + \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t T_{t-s} (\lambda(s) B u_k(s) + \mu(s)) ds \right]$$

$$= A T_{t-t_0} u_0 + \frac{d}{dt} \left[\int_0^{t-t_0} T_s (\lambda(t-s) B u_k(t-s) + \mu(t-s)) ds \right]$$

$$= A T_{t-t_0} u_0 + T_{t-t_0} (\lambda(t_0) B u_k(t_0) + \mu(t_0))$$

$$+ \int_0^{t-t_0} T_s (\dot{\lambda}(t-s) B u_k(t-s) + \lambda(t-s) B \dot{u}_k(t-s) + \dot{\mu}(t-s)) ds$$

$$= A T_{t-t_0} u_0 + T_{t-t_0} (\lambda(t_0) B u_0 + \mu(t_0))$$

$$+ \int_{t_0}^t T_{t-s} (\dot{\lambda}(s) B u_k(s) + \lambda(s) B \dot{u}_k(s) + \dot{\mu}(s)) ds .$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein ($k \geq 0$):

$$v_0 : = \dot{u}_0$$

$$v_k : = \dot{u}_k$$

$$p_k(t) = A T_{t-t_0} u_0 + T_{t-t_0} (\lambda(t_0) B u_0 + \mu(t_0))$$

$$+ \int_{t_0}^t T_{t-s} (\dot{\lambda}(s) B u_k(s) + \dot{\mu}(s)) ds$$

$$\text{und} \quad h(t, s, w) = T_t \lambda(s) B w.$$

Dann gilt für $k \geq 0$:

$$v_{k+1}(t) = \int_{t_0}^t h(t-s, s, v_k(s)) ds + p_k(t).$$

Mit Hilfe der Abschätzung (6.5.1) ergibt sich:

Es existieren reelle Zahlen $\bar{a}$ und $\bar{b}$, so daß für $k \geq 0$

und $t_0 \leq t \leq n$ gilt:

$$\|p_{k+1}(t) - p_k(t)\|$$

$$\leq \int_{t_0}^t \|T_{t-s}\| |\dot{\lambda}(s)| \|B\| \|u_{k+1}(s) - u_k(s)\| ds$$

$$\leq \bar{a} \frac{(\bar{b}(t-t_0))^{k+2}}{(k+2)!}.$$

Da auch h den Voraussetzungen von Lemma 6.3 genügt, folgt also:

$\{\dot{u}_k\}_{k=0}^{\infty}$ ist eine Cauchyfolge in $C_X[t_0, n]$.

Damit ist nach unseren Vorüberlegungen u stetig differenzierbar. Folglich ist auch die Abbildung

$$p : [t_0, \infty) \ni t \rightarrow \lambda(t) Bu(t) + \mu(t)$$

stetig differenzierbar. Aus dem Beweis von Satz 5.3 b) entnimmt man sofort:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\int_{t_0}^t T_{t-s} (\lambda(s) Bu(s) + \mu(s)) ds \right] \\ &= A \left[\int_{t_0}^t T_{t-s} (\lambda(s) Bu(s) + \mu(s)) ds \right] + \lambda(t) Bu(t) + \mu(t). \end{aligned}$$

Da $T_{t-t_0} u_0$ für $u_0 \in D(A)$ der homogenen Gleichung

$\dot{u} = Au$ genügt, folgt für die Lösung der Integralgleichung:

$$\dot{u} = Au + \lambda(t) Bu + \mu(t). \quad \text{—}$$

Bemerkung 6.8

Die Aussage von Satz 6.7 ist trivial, falls $\lambda(t) \equiv \lambda(t_0)$ ist. In diesem Fall erzeugt der lineare Operator $A + \lambda(t_0) B$ ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe (vgl. Dunford-Schwartz [11]). Da μ stetig differenzierbar ist, folgt dann die Behauptung gemäß Satz 5.3.

In den einleitenden Bemerkungen zu diesem Kapitel wurde bereits darauf hingewiesen, daß sich sehr viele Autoren mit dem Existenzproblem für die Anfangswertaufgabe (6.O.1) beschäftigt haben. In gewissem Zusammenhang mit Satz 6.7 steht eine von Pao und Vogt [37] bewiesene Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Problems:

$$\dot{u} = Au + f(u) \quad u(0) = u_0.$$

Dabei wird jedoch verlangt, daß Definitionsbereich und Bildbereich von A in einem Hilbertraum liegen. Ferner soll A eine stark stetige Halbgruppe mit $M = 1$ und $\alpha < 0$ erzeugen. Dagegen wird von f nur Lipschitz-Stetigkeit (keine Linearität) verlangt. Die Lipschitz-Konstante k unterliegt jedoch der Einschränkung: $\alpha + k < 0$.

Bevor wir das Verhalten der Lösungen des Problems (6.O.1) untersuchen, wollen wir die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\dot{u} = Au + p(t) \tag{1}$$

$$\dot{u} = Au + p(t) + h(t, u) \tag{2}$$

miteinander vergleichen. Dabei beschäftigen wir uns vor allem mit den beschränkten Lösungen. Im folgenden setzen wir voraus, daß A und p den Bedingungen von Satz 5.2 genügen. Ferner soll für h die in Satz 6.2 angegebene Lipschitz-Bedingung erfüllt sein. Dann existiert zu jedem $u_0 \in D(A)$ höchstens eine Lösung u der Gleichung (1) (bzw. (2)) mit $u(t_0) = u_0$.

Weiter setzen wir voraus, daß zu jedem $u_0 \in D(A)$ eine Lösung existiert, und sichern somit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung. Die Lösung besitzt dann die in Satz 5.2 b) (bzw. Satz 6.1) angegebene Darstellung.

In dem linearen Vektorraum $C_X[t_0, \infty)$ aller stetigen Abbildungen $u: [t_0, \infty) \rightarrow X$ definieren wir die Teilmengen

$$L_1 := \{ u \in C_X[t_0, \infty) \mid u \text{ ist Lösung von (1)} \}$$

und

$$L_2 := \{ u \in C_X[t_0, \infty) \mid u \text{ ist Lösung von (2)} \}.$$

Mit B_1 (bzw. B_2) bezeichnen wir die Teilmenge der beschränkten Lösungen

$$\left(\text{d.h. } \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty \right) \text{ in } L_1 \text{ (bzw. } L_2 \text{)}.$$

Ferner benötigen wir den Teilraum

$$Y := \{ u \in C_X[t_0, \infty) \mid \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\| < \infty \}.$$

Versehen mit der Norm $\|u\| := \sup_{t \geq t_0} \|u(t)\|$, ist Y ein

Banachraum.

Schließlich definieren wir die Abbildung

$$V : L_1 \rightarrow L_2$$

durch $(Vu)(t_0) = u(t_0)$ für $u \in L_1$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit ist V wohldefiniert. Dann gilt:

Lemma 6.9

Die Abbildung $V : L_1 \rightarrow L_2$ ist bijektiv.

Beweis:

Sei $v \in L_2$. Dann ist $v(t_0) = v_0 \in D(A)$, und es existiert genau ein $u \in L_1$ mit $u(t_0) = v_0$. Daraus folgt sofort $Vu = v$, und somit ist V surjektiv. Sind u_1 und u_2 aus L_1 und gilt $Vu_1 = Vu_2$, so folgt aus der Definition von V :

$$u_1(t_0) = u_2(t_0).$$

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit von (1) ergibt sich daraus: $u_1 = u_2$. Damit ist V auch injektiv. —

Das nächste Lemma gibt Auskunft über die Menge B_1 in dem Fall, daß sämtliche Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{u} = Au$ beschränkt sind.

Lemma 6.10

Sind alle Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{u} = Au$ beschränkt, so gilt $L_1 = B_1$ genau dann, wenn B_1 nicht leer ist.

Beweis:

Es ist nur zu zeigen, daß aus $B_1 \neq \emptyset$ die Beziehung $L_1 = B_1$ folgt. Die andere Richtung ist trivial. Sei $v \in B_1$, dann gilt nach Satz 5.2 b) für $t \geq t_0$

$$v(t) = T_{t-t_0} v(t_0) + \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds.$$

Da $T_{t-t_0} v(t_0)$ die homogene Gleichung löst, folgt mit Hilfe der Voraussetzung:

$$\sup_{t \geq t_0} \left\| \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds \right\| \leq \sup_{t \geq t_0} \|v(t)\| + \sup_{t \geq t_0} \|T_{t-t_0} v(t_0)\| < \infty.$$

Ist nun $u \in L_1$ beliebig vorgegeben, so erhält man nach Satz 5.2 b) die Abschätzung:

$$\|u(t)\| \leq \|T_{t-t_0} u(t_0)\| + \left\| \int_{t_0}^t T_{t-s} p(s) ds \right\|.$$

Somit ist $u \in B_1$. —

Das nächste Lemma gibt hinreichende Bedingungen, so daß die Existenz einer beschränkten Lösung von Gleichung (2) die Beschränktheit aller Lösungen von (1) nach sich zieht.

Lemma 6.11

Es sei $h(t,0) \equiv 0$; ferner sei eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

a) $\alpha \leq 0$ und $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$,

b) $\alpha < 0$ und $\sup_{t \geq t_0} \gamma(t) < \infty$.

Dann folgt $L_1 = B_1$ aus $B_2 \neq \emptyset$.

Beweis:

Sei $v \in B_2$. Nach Lemma 6.9 existiert genau ein $u \in L_1$ mit $Vu = v$. Aus Satz 6.1 und Satz 5.2 b) erhält man für $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} v(t) &= T_{t-t_0} v(t_0) + \int_{t_0}^t T_{t-s} \left\{ p(s) + h(s, v(s)) \right\} ds \\ &= u(t) + \int_{t_0}^t T_{t-s} \left\{ h(s, v(s)) \right\} ds. \end{aligned}$$

Somit erhält man die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|v(t)\| + \int_{t_0}^t M e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) \|v(s)\| ds \\ &= \sup_{s \geq t_0} \|v(s)\| \left(1 + \int_{t_0}^t M e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) ds \right). \end{aligned}$$

Da unter Voraussetzung von a) oder b) das Integral nach oben beschränkt ist, ergibt sich also: $u \in B_1$.

Da $\alpha \leq 0$ gilt, sind alle Lösungen der homogenen Gleichung beschränkt (s. Bemerkung 4.5). Damit folgt aus Lemma 6.10:

$$L_1 = B_1. \quad \text{---}$$

Der folgende Satz gibt unter anderem eine hinreichende Bedingung für die Beschränktheit aller Lösungen von Gleichung (2) an.

Satz 6.12

Sei $h(t,0) \equiv 0$, $L_1 = B_1$, und das Integral

$$\int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) \, ds$$

sei nach oben beschränkt. Dann gilt:

- a) $L_2 = B_2$
- b) Die Abbildung $V: B_1 \rightarrow B_2$ ist ein Homöomorphismus (bzgl. der Norm in Y).

Beweis:

a) Sei $v \in L_2$ beliebig vorgegeben. Dann existiert genau ein $u \in L_1 = B_1$ mit $Vu = v$. Aus den Darstellungen der Lösungen folgt dann für $t \geq t_0$:

$$v(t) = u(t) + \int_{t_0}^t T_{t-s} h(s, v(s)) \, ds.$$

Somit ergibt sich die Abschätzung:

$$\|v(t)\| \leq \|u\| + \int_{t_0}^t M e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) \|v(s)\| \, ds.$$

Daraus erhält man mittels des Gronwall'schen Lemmas (s. auch Beweis zu Satz 6.2 b)):

$$(6.12.1) \quad \|v(t)\| \leq \|u\| \exp \int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) \, ds.$$

Somit ist $v \in B_2$ und die Behauptung a) bewiesen.

b) Sei c eine obere Schranke für das Integral

$$\int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) \, ds.$$

Sind u_1 und u_2 Elemente aus B_1 , so folgt aus Satz 6.2 a) für $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \| (V u_1)(t) - (V u_2)(t) \| &\leq M \| (V u_1)(t_0) - (V u_2)(t_0) \| e^C \\ &= M \| u_1(t_0) - u_2(t_0) \| e^C \leq M e^C \| u_1 - u_2 \|. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit

$$\| V u_1 - V u_2 \| \leq M e^C \| u_1 - u_2 \|$$

sofort die Stetigkeit von V .

Sind v_1 und v_2 aus B_2 , so ist die Differenz

$w := V^{-1} v_1 - V^{-1} v_2$ Lösung der homogenen Gleichung $\dot{u} = A u$.

Daraus folgt mittels der Bemerkung 4.5 für $t \geq t_0$:

$$\begin{aligned} \| w(t) \| &\leq \| T_{t-t_0} \| \| (V^{-1} v_1)(t_0) - (V^{-1} v_2)(t_0) \| \\ &\leq M e^{\alpha(t-t_0)} \| v_1(t_0) - v_2(t_0) \| \leq M e^{\alpha(t-t_0)} \| v_1 - v_2 \|. \end{aligned}$$

Wegen der Positivität der Funktion γ ist notwendig

$\alpha \leq 0$. Somit erhält man weiter:

$$\| V^{-1} v_1 - V^{-1} v_2 \| \leq M \| v_1 - v_2 \|.$$

Damit ist auch V^{-1} stetig. -

Bemerkung 6.13

Die Aussage a) wurde von Brauer [3] für gewöhnliche Differentialgleichungen unter der etwas stärkeren Voraussetzung „ $\alpha \leq 0$ und $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$ ” bewiesen. Mit

dieser Bedingung erzielte Coppel [7] ein zu b) analoges Resultat für gewöhnliche Differentialgleichungen. Für solche Gleichungen ($X = \mathbb{R}^n$, A $n \times n$ Matrix) finden sich bei Brauer [3] hinreichende Bedingungen für den folgenden Sachverhalt:

Zu jeder Lösung u von Gleichung (1) existiert eine Lösung v von Gleichung (2) so, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(t) - v(t)| = 0$$

gilt.

In diesem Fall sagt man, daß sich die Gleichung (2) asymptotisch wie die Gleichung (1) verhält. Eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf abstrakte Differentialgleichungen liefert der folgende Satz.

Satz 6.14

Es seien die Bedingungen $h(t,0) \equiv 0$, $\alpha < 0$ und $L_1 = B_1$ erfüllt. Ferner gelte $\int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$ oder $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$.

Dann folgt für jedes $u \in L_1$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|(Vu)(t) - u(t)\| = 0.$$

Beweis:

Nach den Voraussetzungen für α und γ ist das Integral

$\int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) ds$ nach oben beschränkt. Ist $u \in L_1$,

so ist wegen Satz 6.12 das Element $v := Vu$ aus B_2 ,
und es gilt für $t \geq t_0$:

$$(Vu)(t) - u(t) = \int_{t_0}^t T_{t-s} h(s, v(s)) ds.$$

Daraus folgt für $t \geq t_0$ die Abschätzung:

$$\| (Vu)(t) - u(t) \| \leq \|v\| \int_{t_0}^t M e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) ds.$$

Da aus beiden Bedingungen für γ jeweils

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \gamma(s) ds = 0$$

folgt (vgl. Beweis zu Satz 5.8), ist die Behauptung bewiesen. —

Im nächsten Satz untersuchen wir das Verhalten von Lösungen der Differentialgleichung

$$\dot{u} = Au + f(t, u).$$

Wir gewinnen Resultate, indem wir diese Gleichung mit einer geeigneten Gleichung der Form (1) vergleichen und die entwickelten Vergleichssätze anwenden.

Satz 6.15

A und f mögen die Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllen, und das Anfangswertproblem (6.0.1)

$$\dot{u} = Au + f(t, u) \quad u(t_0) = u_0$$

sei für $u_0 \in D(A)$ eindeutig lösbar. Auch das Problem

$$\dot{u} = Au + f(t, 0) \quad u(t_0) = u_0$$

besitze für $u_0 \in D(A)$ genau eine Lösung. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Ist das Integral $\int_{t_0}^t (\alpha + M\gamma(s)) ds$ nach oben beschränkt, und ist eine der folgenden Bedingungen

$$i) \quad \alpha \leq 0 \quad \text{und} \quad \int_{t_0}^{\infty} \|f(t, 0)\| dt < \infty$$

$$ii) \quad \alpha < 0 \quad \text{und} \quad \sup_{t \geq t_0} \|f(t, 0)\| < \infty$$

erfüllt, so ist jede Lösung von (6.0.1) beschränkt.

b) Sei $\alpha < 0$ und eine der beiden Bedingungen

$$iii) \quad \int_{t_0}^{\infty} \gamma(t) dt < \infty$$

$$iv) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t) = 0$$

erfüllt.

Ferner gelte entweder die Bedingung

$$v) \quad \int_{t_0}^{\infty} \|f(t, 0)\| \, dt < \infty$$

oder

$$vi) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|f(t, 0)\| = 0, \quad \text{so gilt für jede Lösung}$$

von (6.15.1):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Beweis:

Wir definieren die Abbildungen p und h durch

$$p(t) := f(t, 0)$$

und $h(t, u) := f(t, u) - f(t, 0)$. Dann erfüllt h die Voraussetzung von Satz 6.2:

$$\|h(t, u_1) - h(t, u_2)\| \leq \gamma(t) \|u_1 - u_2\|,$$

und außerdem gilt: $h(t, 0) \equiv 0$. Wir wenden nun die Vergleichssätze auf die Gleichungen

$$\dot{u} = Au + p(t)$$

$$\text{und} \quad \dot{u} = Au + p(t) + h(t, u)$$

an und benutzen die eingeführten Bezeichnungen.

- a) Mit i) oder ii) sind die Voraussetzungen von Satz 5.4 erfüllt, und es gilt: $L_1 = B_1$. Daraus folgt nach Satz 6.12 wegen der Beschränktheit des Integrals: $L_2 = B_2$. Damit ist a) bewiesen.

b) Zunächst ist die Voraussetzung von Teil a) erfüllt, so daß $L_2 = B_2$ gilt. Mittels Satz 5.8 ergibt sich aus den Bedingungen v) und vi), daß für jedes $u \in L_1 = B_1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$$

gilt. Sei nun $v \in L_2 = B_2$. Dann existiert gemäß Lemma 6.9 ein $u \in L_1$ mit $Vu = v$, und mit Hilfe von Satz 6.14 erhält man:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \| (Vu)(t) - u(t) \| = 0.$$

Daraus folgt sofort die Beziehung $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0$,

und b) ist bewiesen. —

Bemerkung 6.16

Mit den Voraussetzungen von Satz 6.15 a) ii) erhält man für die Lösung u des Anfangswertproblems (6.0.1) die Abschätzung (vgl. Formel (6.12.1)):

$$\|u(t)\| \leq \|\bar{u}\| \exp \int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) ds.$$

Dabei ist $\bar{u}$ Lösung des Problems

$$\dot{\bar{u}} = A \bar{u} + f(t, 0) \quad \bar{u}(t_0) = u_0.$$

Aus der Abschätzung für $\bar{u}$ (s. Formel (5.4.1)) ergibt sich insgesamt für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\| \leq M(\|u_0\| + |\alpha|^{-1} \sup_{s \geq t_0} \|f(s, 0)\|) \exp \int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) ds.$$

Mittels dieser Ungleichung beweist man unmittelbar die folgende Behauptung:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existieren reelle Zahlen $\delta(\epsilon)$ und $\eta(\epsilon)$ so, daß aus $\|u_0\| < \delta(\epsilon)$ und $\sup_{s \geq t_0} \|f(s, 0)\| < \eta(\epsilon)$

für $t \geq t_0$ stets

$$\|u(t)\| < \epsilon$$

folgt.

Dieses Verhalten der homogenen Gleichung $\dot{u} = Au$ gegenüber Störungen der Form $f(t, u)$ steht in engem Zusammenhang mit dem Begriff der "totalen Stabilität" (vgl. dazu insbesondere Hahn [17]). Eine ähnliche Beziehung läßt sich selbstverständlich auch dann herleiten, wenn die Voraussetzungen von Satz 6.15 a) i) erfüllt sind.

Ein weiteres Beschränktheitskriterium liefert der letzte Satz dieses Paragraphen, der auch für das Problem der totalen Stabilität von Bedeutung ist. Wir betrachten wiederum das Anfangswertproblem (6.0.1) und benutzen die bereits eingeführten Bezeichnungen $p(t) = f(t, 0)$ und $h(t, u) = f(t, u) - f(t, 0)$. Es kommt häufig vor, daß h anstelle der Lipschitz-Bedingung nur der Bedingung

$$\|h(t, u)\| = o(\|u\|)$$

für $\|u\| \rightarrow 0$ genügt. In diesem Fall versagen unsere bisher angeführten Vergleichssätze. Ebenso geht die Aussage über die Eindeutigkeit der Lösung (Satz 6.2) verloren.

Setzen wir jedoch weiter die Stetigkeit von f voraus, so genügt jede Lösung des Anfangswertproblems der zugehörigen Volterraschen Integralgleichung (vgl. Satz 6.1). Für diese Situation läßt sich ohne Schwierigkeiten ein ebenfalls von Brauer [3] bewiesener Satz verallgemeinern.

Satz 6.17

Sei $\alpha < 0$ und mit der Konstanten $c := \frac{\delta |\alpha|}{M}$ ($0 < \delta < 1$) gelte für $\|u\| \leq H$ und $t \geq t_0$ die Abschätzung:

$$\|h(t, u)\| \leq c \|u\|.$$

Weiter sei für $t \geq t_0$ die Ungleichung

$$\|p(t)\| \leq \frac{H|\alpha|}{2M} (1-\delta)$$

erfüllt. Ist dann für $t \geq t_0$ die Abbildung u eine Lösung des Problems (6.0.1) mit $\|u_0\| \leq H(2M+1)^{-1}$, so gilt für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\| \leq \frac{H}{2}.$$

Aus der Darstellung der Lösung u (Satz 6.1) erhält man, solange $\|u(t)\| \leq H$ gilt, sofort die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| \leq M \|u_0\| e^{\alpha(t-t_0)} + M \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \|p(s)\| ds \\ + c M \int_{t_0}^t e^{\alpha(t-s)} \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Der weitere Beweis verläuft dann völlig analog zum Beweis des reellen Falles, wie er sich bei Reißig-Sansone-Conti [39] findet.

§ 7 Stabilität und Instabilität

Für $u_0 \in D(A)$ betrachten wir wiederum das Anfangswertproblem (6.0.1):

$$\ddot{u} = A u + f(t, u) \quad u(t_0) = u_0; \quad t \geq t_0.$$

Wir verlangen, daß A und f den Voraussetzungen von Satz 6.2 genügen, so daß höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems existiert. Zusätzlich sei auch die Existenz einer Lösung gesichert. Ferner sei $f(t, 0) \equiv 0$, so daß $u \equiv 0$ die eindeutig bestimmte Lösung des Problems mit $u_0 = 0$ ist. Wir formulieren zunächst einen einfachen Satz über die Stabilität der Ruhelage $u \equiv 0$.

Satz 7.1

Für $t \geq t_0$ definieren wir die reellwertige Funktion

$$\omega : [t_0, \infty) \ni t \rightarrow \int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) \, ds.$$

Dann gilt:

- a) Die Ruhelage $u \equiv 0$ ist stabil, falls ω nach oben beschränkt ist.
- b) Sie ist asymptotisch stabil, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \infty$$

gilt.

Beweis:

Ist u die Lösung des Problems mit $u(t_0) = u_0$, so folgt gemäß Satz 6.2 a) für $t \geq t_0$ die Abschätzung:

$$\|u(t)\| \leq M \|u_0\| \exp \int_{t_0}^t (\alpha + M \gamma(s)) ds.$$

a) Existiert $\sup_{t \geq t_0} \omega(t)$, so folgt aus der Beziehung

$$\|u(t)\| \leq M \|u_0\| \exp \left\{ \sup_{s \geq t_0} \omega(s) \right\}$$

sofort die Stabilität der Ruhelage.

b) Gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = -\infty$, so existiert $\sup_{t \geq t_0} \omega(t)$,

und die Ruhelage ist stabil. Zusätzlich erhält man aus der obigen Ungleichung:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0.$$

Damit ist die Ruhelage asymptotisch stabil. —

Genügt f nicht der Lipschitz-Bedingung aus Satz 6.2, so läßt sich ebenfalls eine Stabilitätsaussage herleiten. Diese ergibt sich sofort aus dem Satz 6.17.

Satz 7.2

Sei $\alpha < 0$, $f(t, 0) \equiv 0$ und mit der Konstanten

$$c := \frac{\delta |\alpha|}{M} \quad (0 < \delta < 1) \quad \text{gelte für } \|u\| \leq H \text{ und } t \geq t_0$$

die Abschätzung:

$$\|f(t, u)\| \leq c \|u\|.$$

Dann ist die Ruhelage $u \equiv 0$ asymptotisch stabil.

Beweis:

Gemäß Satz 6.17 ergibt sich unmittelbar die folgende Beziehung:

Wählt man zu beliebigem $\varepsilon > 0$ die Zahl

$$\eta(\varepsilon) := \min [2\varepsilon (2M+1)^{-1}, H(2M+1)^{-1}],$$

so folgt aus $\|u_0\| \leq \eta(\varepsilon)$ für $t \geq t_0$:

$$\|u(t)\| \leq \varepsilon.$$

Damit ist die Ruhelage stabil. Die Attraktivität der Ruhelage (d.h. $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$) erhält man aus der Abschätzung:

$$\|u(t)\| \leq M \|u_0\| \exp (\alpha (1-\delta) (t-t_0)).$$

Diese Ungleichung gewinnt man ebenfalls ohne Schwierigkeiten aus dem erwähnten Satz von Brauer (vgl. wieder Reißig-Sansone-Conti [39]). -

Im folgenden Satz geben wir ein hinreichendes Kriterium für die Instabilität der Ruhelage an. Dabei tritt die Instabilität in ihrer schärfsten Form an. Außer der Ruhelage existiert nämlich keine beschränkte Lösung.

Satz 7.3

Der lineare Operator A erzeuge die stark stetige Halbgruppe $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$ mit $\|T_t\| \leq e^{\alpha t}$ für $t \geq 0$. f erfülle die Voraussetzung von Satz 6.2, und es gelte $f(t, 0) \equiv 0$. Ferner sei die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (\alpha + \gamma(s)) \, ds = -\infty$$

erfüllt. Dann gilt für jede stetig differenzierbare Lösung des Problems

$$\dot{u} = -Au + f(t, u) \quad u(t_0) = u_0; \quad t \geq t_0$$

mit $u_0 \neq 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\| = +\infty.$$

Beweis:

Die stark stetige Halbgruppe $S_t := e^{-\alpha t} T_t$ besitzt den infinitesimalen Generator

$$A - \alpha I.$$

Wegen der Abschätzung $\|S_t\| \leq 1$ folgt nach dem Satz von Lumer und Phillips (s. Yoshida [44]):

$$[(A - \alpha I)u, u] \leq 0.$$

Mit [...] wird dabei ein die Norm in X erzeugendes Semi-Skalarprodukt bezeichnet (vgl. Kapitel I, Definition 1.4). Die Eigenschaften des Semi-Skalarproduktes liefern dann:

$$[-Au, u] \geq -\alpha \|u\|^2.$$

Ferner folgt aus der Lipschitz-Bedingung für f :

$$[f(t, u), u] = -[-f(t, u), u] \geq -\gamma(t) \|u\|^2.$$

Schließlich gilt die Beziehung

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t (-\alpha - \gamma(s)) \, ds = +\infty.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.10 erfüllt, und die Behauptung ist bewiesen. —

Bemerkung 7.4

Wir weisen darauf hin, daß die Voraussetzungen von Satz 7.3 weder die Existenz noch die Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems garantieren, da $-A$ nicht notwendig ebenfalls eine stark stetige Halbgruppe erzeugt. Ist dagegen A Erzeuger einer stark stetigen Gruppe, so erzeugt auch $-A$ eine stark stetige Halbgruppe. In diesem Fall sind die nicht-trivialen Lösungen der homogenen Gleichung

$$\dot{u} = -Au$$

unbeschränkt.

Jedoch auch dann, wenn die Lösungen der homogenen Gleichung beschränkt sind, läßt sich eine Aussage wie in Satz 7.3 beweisen. Allerdings geben wir dabei die Voraussetzung $f(t,0) \equiv 0$ auf.

Satz 7.5

Der Operator A erzeuge die stark stetige Halbgruppe $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$ mit $\|T_t\| \leq M e^{\alpha t}$, und f genüge der Lipschitz-Bedingung aus Satz 6.2. Ferner sei die reellwertige Funktion

$$\left\| \int_{t_0}^t T_{t-s} f(s,0) \, ds \right\|$$

unbeschränkt. Gilt dann eine der beiden Bedingungen von Lemma 6.11, so ist jede Lösung der Gleichung

$$\dot{u} = Au + f(t,u) \quad t \geq t_0$$

unbeschränkt.

Beweis:

Wegen $\alpha \leq 0$ (s. Lemma 6.11) sind alle Lösungen der homogenen Gleichung $\dot{u} = Au$ beschränkt. Aus der Integralbedingung erhält man sofort, daß sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\dot{u} = Au + f(t,0)$$

unbeschränkt sind. Dann sind gemäß Lemma 6.11 auch alle Lösungen der Gleichung $\dot{u} = Au + f(t,u)$ unbeschränkt. —

§ 8 Ein einfaches Beispiel

Mit X bezeichnen wir den Vektorraum aller auf $\mathbb{R}$ definierten, gleichmäßig stetigen und beschränkten Funktionen. Führen wir für eine solche Funktion

$$\|\varphi\| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$$

ein, so ist X bezüglich dieser Norm ein Banachraum. Insbesondere enthält X alle stetigen Funktionen φ , für die die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)$$

existieren.

Für reelle Zahlen α , β und t mit $\beta \neq 0$ definieren wir die Abbildung:

$$T_t : X \ni \varphi \rightarrow (\mathbb{R} \ni x \rightarrow e^{\alpha t} \varphi(x + \beta t)).$$

Man sieht sofort, daß T_t linear ist und den Raum X in sich abbildet. Außerdem gilt für $\varphi \in X$ die Gleichung:

$$\|T_t \varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |e^{\alpha t} \varphi(x + \beta t)| = e^{\alpha t} \|\varphi\|.$$

Damit ist $T_t \in \mathcal{L}(X)$ für $t \in \mathbb{R}$. Ebenso mühelos überzeugt man sich, daß für $t, s \in \mathbb{R}$ stets

$$T_t \circ T_s = T_{t+s}$$

gilt.

Seien nun $\varphi \in X$ und $t_0 \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben. Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$ die Abschätzung:

$$\|T_t \varphi - T_{t_0} \varphi\|$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(|\varphi(x + \beta t) (e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0})| + |e^{\alpha t_0} (\varphi(x + \beta t) - \varphi(x + \beta t_0))| \right)$$

$$\leq \|\varphi\| |e^{\alpha t} - e^{\alpha t_0}| + e^{\alpha t_0} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x + \beta t) - \varphi(x + \beta t_0)|.$$

Mit Hilfe der gleichmäßigen Stetigkeit von φ ergibt sich daraus die Stetigkeit der Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \rightarrow T_t \varphi \in X.$$

Somit ist die Familie $\{T_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ eine stark stetige Gruppe (s. Definition 4.6). Gemäß Satz 4.4 a) besitzt die stark stetige Halbgruppe $\{T_t \mid t \geq 0\}$ einen infinitesimalen Generator A mit einem in X dichten Definitionsbereich $D(A)$. Auskunft über A und $D(A)$ gibt das folgende Lemma.

Lemma 8.1

Es gilt $D(A) = \{\varphi \in X \mid \varphi' \in X\}$ und

$$A : D(A) \ni \varphi \rightarrow \alpha \varphi + \beta \varphi'.$$

Beweis:

a) Wir beweisen zuerst die folgende Behauptung:

Ist $\varphi \in D(A)$, so ist φ differenzierbar und die Ableitung φ' liegt in X . Ferner gilt:

$$A \varphi = \alpha \varphi + \beta \varphi'.$$

Für $\varphi \in D(A)$ erhält man sofort die Beziehung (s. Definition 4.3):

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_t \varphi - \varphi}{t} = A \varphi.$$

Daraus folgt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (A \varphi)(x) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^{\alpha t} \varphi(x + \beta t) - \varphi(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \varphi(x) \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} + e^{\alpha t} \frac{\varphi(x + \beta t) - \varphi(x)}{t} \right\}. \end{aligned}$$

Dann ergibt sich leicht, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\varphi(x + \beta t) - \varphi(x)}{\beta t} =: w(x)$$

existiert. Somit ist φ rechtsseitig (für $\beta > 0$) oder linksseitig (für $\beta < 0$) differenzierbar. Da die Funktion $A \varphi$ stetig ist, gilt dies auch für w . Aus einem wohlbekannten Lemma (s. etwa Yoshida [44], S. 239) folgt daraus: φ ist stetig differenzierbar.

Mit Hilfe dieser Tatsache ergibt sich dann:

$$(A\varphi)(x) = \frac{d}{dt} \left(e^{\alpha t} \varphi(x + \beta t) \right)_{t=0} = \alpha \varphi(x) + \beta \varphi'(x).$$

Schließlich ist wegen $A\varphi \in X$ und $\varphi \in X$ auch $\varphi' \in X$ bewiesen. Damit ist die obige Behauptung gezeigt.

- b) Um die Aussage von Lemma 8.1 vollständig zu beweisen, müssen wir noch folgendes zeigen: Ist $\varphi \in X$ und $\varphi' \in X$, so gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T_t \varphi - \varphi}{t} = \alpha \varphi + \beta \varphi' \quad (8.1.1)$$

Zunächst erhält man mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\left\| \frac{T_t \varphi - \varphi}{t} - \alpha \varphi - \beta \varphi' \right\|$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \varphi(x) \left(\frac{e^{\alpha t} - 1}{t} - \alpha \right) \right|$$

$$+ \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{\alpha t} \frac{\varphi(x + \beta t) - \varphi(x)}{t} - \beta \varphi'(x) \right|$$

$$\leq \|\varphi\| \left| \frac{e^{\alpha t} - 1}{t} - \alpha \right| + \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| e^{\alpha t} \beta \varphi'(x + \xi) - \beta \varphi'(x) \right|,$$

mit $0 \leq |\xi| \leq |\beta t|$. Ferner hängt ξ von x ab.

Offensichtlich konvergiert der erste Summand gegen 0 für $t \rightarrow 0+$. Den zweiten Summanden schätzen wir weiter ab:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |e^{\alpha t} \beta \varphi'(x+\xi) - \beta \varphi'(x)| \\ & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |e^{\alpha t} \beta (\varphi'(x+\xi) - \varphi'(x))| \\ & + \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x) (e^{\alpha t} \beta - \beta)| \\ & \leq |e^{\alpha t} \beta| \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi'(x+\xi) - \varphi'(x)| + \|\varphi'\| |e^{\alpha t} \beta - \beta|. \end{aligned}$$

Nutzt man die gleichmäßige Stetigkeit der Ableitung φ' aus, so ist die Beziehung (8.1.1) bewiesen. —

Das Ergebnis von Lemma 8.1 findet sich im Ansatz bereits in der Arbeit von Vogt-Buis-Eisen [41]. Jedoch wird dort auf den zugrundeliegenden Raum X und den infinitesimalen Generator A nicht exakt eingegangen. Mit Hilfe von Lemma 8.1 erhält man unmittelbar, daß für $\varphi \in D(A)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} \\ u(0, x) &= \varphi(x) \\ x \in \mathbb{R}, \quad t &\geq 0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung besitzt, nämlich:

$$u(t, x) = e^{\alpha t} \varphi(x + \beta t).$$

Dieses Ergebnis ist natürlich trivial und auf andere Weise einfacher zu erhalten. Wir interessieren uns deshalb für den Fall, daß die homogene Gleichung gestört ist. Zuerst betrachten wir das Anfangswertproblem für die inhomogene Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{p}(t, x).$$

Dabei sei $\bar{p}$ eine reellwertige, in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ definierte Funktion. Ferner sei $\bar{p}$ bei festem t bezüglich x gleichmäßig stetig und beschränkt. Dann können wir eine Abbildung $p : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ durch

$$p : \mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow (\mathbb{R} \ni x \rightarrow \bar{p}(t, x))$$

definieren. Mit Hilfe der Sätze in § 5 leitet man sofort Aussagen über Existenz, Eindeutigkeit, Darstellung und Beschränktheit der Lösungen des Anfangswertproblems her.

Wir kommen nun zur Gleichung mit nicht-linearen Dauerstörungen. Dazu sei f eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}_+ \times X$ in X , die mit einer stetigen Funktion γ der Lipschitz-Bedingung

$$\|f(t, u) - f(t, v)\| \leq \gamma(t) \|u - v\|$$

genügt. Gemäß Satz 6.2 garantiert dies, daß für

$\varphi \in D(A)$ das Problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + f(t, u(t, x))$$

$$u(0, x) = \varphi(x)$$

höchstens eine Lösung besitzt.

Ferner sind die Sätze aus § 6 anwendbar, wenn wir die Existenz der Lösung voraussetzen. Dafür wurden in § 6 hinreichende Bedingungen angegeben. Besitzt f die Gestalt:

$$f(t, u) = \lambda(t) B u + \mu(t),$$

wobei B eine stetige, lineare Abbildung von X in sich ist, und die Abbildungen:

$$\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow X$$

stetig differenzierbar sind, so ist nach Satz 6.7 auch die Existenz der Lösung gesichert. Jedoch ist auch die Behandlung wesentlich komplizierterer Gleichungen möglich. Als Beispiel führen wir das Anfangswertproblem für eine partielle Integro-Differentialgleichung an:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + g(t) e^{-x^2} \int_0^x h(u(t, s)) ds$$

$$u(0, x) = \varphi(x).$$

Dabei seien die Funktionen $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und h mit $h(0) = 0$ genüge der globalen Lipschitz-Bedingung:

$$|h(x) - h(y)| \leq c |x - y|.$$

Definieren wir die Abbildung

$$f: \mathbb{R}_+ \times X \ni (t, \varphi) \rightarrow \left\{ \mathbb{R} \ni x \rightarrow g(t) e^{-x^2} \int_0^x h(\varphi(s)) ds \right\},$$

so folgt aus $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(t, \varphi))(x) = 0$ sofort die Beziehung:

$f(t, \varphi) \in X$. Ferner genügt f für $t \geq 0$ und $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ der Bedingung:

$$\|f(t, \varphi_1) - f(t, \varphi_2)\| \leq c |g(t)| \cdot \sup_{x \in \mathbb{R}} |x| e^{-x^2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 6.2 erfüllt.

Führen wir die Bezeichnung $\psi := f(t, \varphi)$ ein, so gilt:

$$\psi'(x) = g(t) e^{-x^2} \left[h(\varphi(x)) - 2x \int_0^x h(\varphi(s)) ds \right].$$

Da daraus $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \psi'(x) = 0$ folgt, erhalten wir für

$$(t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times X:$$

$$f(t, \varphi) \in D(A).$$

Weiter folgt durch leichte Rechnungen, daß für jede stetige Abbildung $v: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$ auch die Abbildung

$$\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow A f(t, v(t)) \in X$$

stetig ist.

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 6.6 erfüllt, und das Anfangswertproblem besitzt für $\varphi \in D(A)$ genau eine Lösung.

Beachten wir, daß $f(t,0) \equiv 0$ ist, so können wir leicht die folgenden Aussagen über das Stabilitätsverhalten der Ruhelage $u \equiv 0$ beweisen.

Satz 8.2

a) Ist $\alpha = 0$ und existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} |g(t)| \, dt,$$

so ist die Ruhelage stabil.

b) Ist $\alpha < 0$ und gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (\alpha + |g(s)|) \, ds = -\infty$,

so ist die Ruhelage global asymptotisch stabil.

c) Ist $\alpha > 0$ und gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t (-\alpha + |g(s)|) \, ds = -\infty$,

so ist jede nicht-triviale Lösung unbeschränkt.

Der Beweis von a) und b) ergibt sich unmittelbar aus Satz 7.1. Um c) zu beweisen, definiere man den Operator $\tilde{A}$ durch

$$\tilde{A} : D(A) \ni \varphi \rightarrow -\alpha \varphi - \beta \varphi' \in X.$$

Nach Lemma 8.1 erzeugt $\tilde{A}$ die stark stetige Halbgruppe $\{ T_t \mid t \geq 0 \}$ mit $\|T_t\| = e^{-\alpha t}$. Nutzt man die Tatsache aus, daß $A = -\tilde{A}$ gilt, so folgt die Behauptung aus Satz 7.3.

Kapitel III Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir die entwickelte Theorie auf Anfangs-Randwertprobleme für partielle Differentialgleichungen anwenden. Dabei beschäftigen wir uns zunächst mit Gleichungen der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L u .$$

In diesem Zusammenhang sind wohl die Navier-Stokes-Gleichungen das interessanteste Beispiel. Am Ende dieses Kapitels behandeln wir dann Gleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} = L u .$$

§ 9 Wärmeleitungsprobleme

Wir beginnen mit dem folgenden verallgemeinerten Wärmeleitungsproblem (9.0.1):

$$u_t = a(x, u, u_x) u_{xx} + b(x, u, u_x) u_x + c(x, u, u_x) u + f(t, x, u)$$

$$\alpha_1 u(t, 0) - \beta_1 u_x(t, 0) = 0$$

$$\alpha_2 u(t, 1) + \beta_2 u_x(t, 1) = 0$$

$$u(0, x) = u_0(x) .$$

Dabei sei $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ und $\alpha_i + \beta_i \neq 0$

für $i = 1, 2$.

Um dieses Problem als Anfangswertproblem in einem Banachraum zu betrachten, definieren wir im Raum $X = C[0,1]$ die Abbildung A durch

$$D(A) := \{u \in C^2[0,1] \mid \alpha_1 u(0) - \beta_1 u'(0) = 0, \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0\}$$

und für $u \in D(A)$

$$(Au)(x) = a(x, u(x), u'(x))u''(x) + b(x, u(x), u'(x))u'(x) + c(x, u(x), u'(x))u(x).$$

Sind dann a , b und c Funktionen aus $C_{\mathbb{R}}([0,1] \times \mathbb{R}^2)$, so gilt offensichtlich:

$$A: X \supset D(A) \ni u \rightarrow Au \in X.$$

Wir versehen X mit der Supremumsnorm und benötigen nun zur Anwendung unserer Theorie ein Semi-Skalarprodukt in X .

Dazu seien f und g aus X . Dann existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit

$$|f(x_0)| = \|f\|.$$

Lemma 9.1

Die Abbildung

$$X \times X \ni (g, f) \rightarrow [g, f] = g(x_0)f(x_0) \in \mathbb{R}$$

mit $|f(x_0)| = \|f\|$ ist ein Semi-Skalarprodukt.

Beweis:

Bei festem f ist die Abbildung

$$X \ni g \rightarrow g(x_0) f(x_0)$$

als Punktfunktional ein Element aus $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Weiter gilt $[g, f] \leq \|g\| \|f\|$ und $[f, f] = |f(x_0)|^2 = \|f\|^2$.

Damit sind die Voraussetzungen erfüllt. —

Aufgrund der Randbedingungen für $u \in D(A)$, läßt sich der maximale Punkt x_0 sogar im Inneren des Intervalles $[0, 1]$ finden. Dies zeigt das

Lemma 9.2

Sei $u \in D(A)$. Dann existiert ein $x_0 \in (0, 1)$ mit $|u(x_0)| = \|u\|$.

Beweis:

Es reicht, zu zeigen, daß das Supremum nicht am Rande angenommen wird. Sei o.B.d.A. $\|u\| \neq 0$.

1. Fall

Sei $|u(0)| = \|u\|$. Ist $u(0) > 0$, so folgt wegen $\alpha_1 u(0) = \beta_1 u'(0)$ auch $u'(0) > 0$. Somit kann $\|u\|$ nicht an der Stelle 0 angenommen werden. Analog argumentiert man auch im Fall $u(0) < 0$.

2. Fall

Sei $|u(1)| = \|u\|$. Ist $u(1) < 0$, so folgt wegen

$$\alpha_2 u(1) = -\beta_2 u'(1):$$

$$u'(1) > 0.$$

Somit ist $|u(1)| \neq \|u\|$. Entsprechendes gilt für

$$u(1) > 0. \text{ —}$$

Ist u 2-mal stetig differenzierbar und $|u(x_0)| = \|u\|$

mit $x_0 \in (0,1)$, so gilt bekanntlich:

$$u'(x_0) = 0 \text{ und } u''(x_0) u(x_0) \leq 0.$$

Damit können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 9.3

Die Funktionen a und c mögen den folgenden Bedingungen genügen:

i) Für alle $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ gelte:

$$a(x,y,0) \geq 0.$$

ii) Sei $\beta \in \mathbb{R}$ und für $(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ gelte:

$$c(x,y,0) \leq \beta.$$

Dann folgt für $u \in D(A)$:

$$[Au, u] \leq \beta \|u\|^2.$$

Beweis:

Nach Konstruktion des Semi-Skalarproduktes gilt

$$[Au, u] = (Au)(x_0) u(x_0)$$

mit $|u(x_0)| = \|u\|$. Nach Lemma 9.2 ist $x_0 \in (0,1)$ und es gilt $u'(x_0) = 0$ und $u''(x_0) \cdot u(x_0) \leq 0$. Daraus folgt sofort:

$$(Au)(x_0) = a(x_0, u(x_0), 0)u''(x_0) + c(x_0, u(x_0), 0)u(x_0).$$

Aus i) und ii) ergibt sich dann:

$$[Au, u] \leq \beta u(x_0) \cdot u(x_0) = \beta |u(x_0)|^2 = \beta \|u\|^2. \quad \text{---}$$

Das nächste Lemma zeigt, daß wir für das Semi-Skalarprodukt $[Au, u]$ auch eine Abschätzung nach unten erhalten können.

Lemma 9.4

Für die Funktionen a und c gelte:

i') Für alle $(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ sei

$$a(x, y, 0) \leq 0.$$

ii') Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und für $(x, y) \in [0,1] \times \mathbb{R}$ gelte

$$c(x, y, 0) \geq \alpha.$$

Dann folgt für $u \in D(A)$:

$$[Au, u] \geq \alpha \|u\|^2.$$

Beweis:

Wie in Lemma 9.3 gilt:

$$(Au)(x_0) = a(x_0, u(x_0), 0)u''(x_0) + c(x_0, u(x_0), 0)u'(x_0)$$

mit $x_0 \in (0,1)$ und $|u(x_0)| = \|u\|$. Daraus folgt dann

$$[Au, u] \geq c(x_0, u(x_0), 0) |u(x_0)|^2 \geq \alpha \|u\|^2. \quad \text{---}$$

Wir setzen nun voraus, daß f ein Polynom in u ist, d.h.

$$f(t, x, u) = \sum_{n=0}^N a_n(t, x) u^n.$$

Sind die Koeffizienten a_n stetige Funktionen, so gilt für die Abbildung

$$F_0 : \mathbb{R}_+ \times X \ni (t, u) \rightarrow F_0(t, u)$$

mit $F_0(t, u)(x) = f(t, x, u(x))$:

$$F_0 : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X.$$

Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

Für ungerades n sei $\mu_n \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß für

$(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ gilt:

$$a_n(t, x) \leq \mu_n.$$

Für gerades $n > 0$ nehmen wir an, es existiere

$$\gamma_n := \sup \{ |a_n(t, x)| \mid x \in [0,1], t \geq 0 \}.$$

Ferner sei

$$\gamma(t) := \sup \{ |a_0(t, x)| \mid x \in [0, 1] \}$$

und

$$L: \mathbb{R}_+ \ni y \rightarrow 2 \left[\beta y + \sum_{v \in U} \mu_v y^{\frac{v+1}{2}} + \sum_{v \in G} \gamma_v y^{\frac{v+1}{2}} \right].$$

Dabei sei $U := \{v \in \mathbb{N} \mid 0 \leq v \leq N, v \text{ ungerade}\}$ und

$G := \{v \in \mathbb{N} \mid 0 < v \leq N, v \text{ gerade}\}.$

Wir können nun den ersten Satz formulieren.

Satz 9.5

Die Funktionen a und c mögen die Voraussetzungen von Lemma 9.3 erfüllen. Ferner sei $\gamma(t) \equiv 0$. Dann gilt:

- a) Existiert eine Zahl $\alpha > 0$ mit $L(\alpha) = 0$, so folgt für jede Lösung des Problems (9.0.1) mit

$$\sup_{x \in [0, 1]} |u_0(x)| < \alpha^{\frac{1}{2}} :$$

$$\sup_{x \in [0, 1]} |u(x, t)| < \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

- b) Ist $\beta + \mu_1 < 0$, so ist die Ruhelage $u \equiv 0$ asymptotisch stabil; sie ist global asymptotisch stabil, falls L keine positiven Nullstellen besitzt.

Beweis:

Für $u \in D(A)$ gilt:

$$\begin{aligned} [F_O(t, u), u] &= \sum_{n=1}^N a_n(t, x_O) (u(x_O))^n u(x_O) \\ &= \sum_{n=1}^N a_n(t, x_O) (u(x_O))^{n+1}. \end{aligned}$$

Ist n ungerade, so ist $n+1$ gerade und es gilt:

$$(u(x_O))^{n+1} = |u(x_O)|^{n+1} = \|u\|^{n+1}.$$

Damit ergibt sich die Abschätzung:

$$|F_O(t, u), u| \leq \sum_{v \in U} \mu_v \|u\|^{v+1} + \sum_{v \in G} \gamma_v \|u\|^{v+1}.$$

Insgesamt folgt also mit Lemma 9.3:

$$2 [Au + F_O(t, u), u]$$

$$\leq 2 \left(\beta \|u\|^2 + \sum_{v \in U} \mu_v \|u\|^{v+1} + \sum_{v \in G} \gamma_v \|u\|^{v+1} \right)$$

$$= L \left(\|u\|^2 \right) \quad \text{für } u \in D(A) \cap X = D(A).$$

Die Behauptung a) folgt nun unmittelbar aus Satz 2.17 a).

b) Wegen $L(0) = 0$ und $L'(0) = 2(\beta + \mu_1) < 0$, ist $L(y) < 0$ für hinreichend kleine, positive y . Die Behauptung folgt dann aus Satz 2.17 c). Besitzt L keine positiven Nullstellen, so ist $L(y) < 0$ für $y > 0$, und die Behauptung über die globale asymptotische Stabilität folgt aus dem Korollar 2.18. —

Nach diesem einfachen Satz wollen wir eine etwas kompliziertere Bedingung für die asymptotische Stabilität der Ruhelage angeben. Es zeigt sich, daß die Koeffizienten des Polynoms mit ungeradem Index von erheblicher Bedeutung sind. Zur Formulierung des Satzes benötigen wir noch die Indexmenge

$$I := \{ \nu \in U \mid \nu > 1 \text{ und } \mu_\nu > 0 \}.$$

Dann gilt mit den eingeführten Bezeichnungen:

Satz 9.6

Die Funktionen a und c mögen den Voraussetzungen von Lemma 9.3 genügen. Ferner sei $\gamma(t) \equiv 0$ und

$$\tilde{\beta} := \beta + \sum_{\nu \in I} \mu_\nu < 0.$$

Sei k eine stetige Funktion, so daß für $(x, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}_+$

stets

$$a_1(t, x) \leq k(t)$$

gilt.

Weiter sei $\sigma \in \mathbb{R}$ und ρ eine positive Zahl mit $\rho \leq 1$ und

$$0 \leq \alpha := \rho \left\{ \sum_{v \in G} \gamma_v \right\} < -\tilde{\beta},$$

so daß für hinreichend große t die Abschätzung

$$t^{-1} \int_0^t k(s) ds \leq \sigma < |\alpha + \tilde{\beta}|$$

gilt. Dann ist die Ruhelage $u \equiv 0$ asymptotisch stabil.

Beweis:

Für $t \geq 0$ definieren wir die Abbildungen

$$A(t) : D(A) \rightarrow X$$

durch

$$(A(t)u)(x) = (Au)(x) + \sum a_v(t, x) (u(x))^v,$$

wobei nur ungerade $v > 1$ zur Summation benutzt werden.

Dann folgt aus Lemma 1.3 und dem Beweis zu Satz 1.5:

$$[A(t)u, u] \leq \beta \|u\|^2 + \sum \mu_v \|u\|^{v+1}$$

$$\leq \beta \|u\| + \sum_{v \in I} \mu_v \|u\|^{v+1}.$$

Da $v+1 \geq 4$ ist, folgt aus $\|u\| \leq 1$

$$\|u\|^{v+1} \leq \|u\|^2.$$

Wegen $\mu_v > 0$ für $v \in I$ können wir insgesamt abschätzen

$$[A(t)u, u] \leq \tilde{\beta} \|u\|^2. \quad \text{Damit ist die Voraussetzung (3.1.1)}$$

von Satz 3.1 erfüllt.

Definiere nun die Abbildung

$$F_1 : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$$

durch

$$F_1(t, u)(x) = \sum_{v \in G} a_v(t, x) \{u(x)\}^v.$$

Sei nun ρ wie in der Voraussetzung angegeben, dann gilt für $\|u\| \leq \rho \leq 1$ und $v \geq 2$:

$$\|u\|^{v+1} \leq \rho \|u\|^2.$$

Somit ergibt sich für $\|u\| \leq \rho$

$$\begin{aligned} [F_1(t, u), u] &\leq \sum_{v \in G} \gamma_v \|u\|^{v+1} \\ &\leq \rho \left\{ \sum_{v \in G} \gamma_v \right\} \|u\|^2 = \alpha \|u\|^2. \end{aligned}$$

Somit erfüllt F_1 die Bedingung (3.1.2) von Satz 3.1.

Definieren wir schließlich

$$F_2 : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$$

durch

$$F_2(t, u)(x) = a_1(t, x) u(x),$$

so gilt

$$[F_2(t, u), u] \leq k(t) \|u\|^2.$$

Damit ist auch die Bedingung (3.1.3) erfüllt.

Nach Voraussetzung gilt: $\alpha + \tilde{\beta} < 0$. Ferner erfüllt k die Integral-Bedingung aus Satz 3.3. Somit folgt die Behauptung aus Satz 3.1. —

Die beiden nächsten Sätze geben qualitative Aussagen über das Verhalten der Lösung im Falle, daß $u \equiv 0$ keine Lösung ist. Wir benutzen die eingeführten Bezeichnungen und fordern wieder:

$$a_1(t, x) \leq \mu_1.$$

Auch hier spielen die Koeffizienten mit ungeradem Index wieder eine zentrale Rolle.

Satz 9.7

Die Funktionen a und c erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 9.3 und es sei

$$\tilde{\beta} := \beta + \mu_1 + \sum_{v \in I} \mu_v < 0.$$

Ferner sei $0 \leq \rho \leq 1$ mit

$$c : \left(\sum_v \gamma_v \right) < -\tilde{\beta}.$$

Die Funktion $\gamma(t) = \sup_{x \in [0, 1]} |a_0(t, x)|$ erfülle die Voraussetzungen i) und ii) von Satz 3.6 mit $\tilde{\beta}$ anstelle von β . Dann existiert eine Kugel $K(0, r) \subset X$, so daß gilt:

Alle Lösungen, die zu einer Anfangsfunktion $u_0 \in K(0, r)$ gehören, sind beschränkt und zusätzlich ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in [0, 1]} |u(t, x)| \right) = 0.$$

Bemerkung 9.8

Eine genauere Darstellung der Kugel läßt sich mühelos aus Satz 3.6 gewinnen. Wegen der Übersichtlichkeit haben wir hier auf die genauen Angaben der Konstanten verzichtet.

Beweis von Satz 9.7

Wir definieren die folgenden Abbildungen:

$$1) \quad A(t) : D(A) \rightarrow X$$

mit

$$(A(t)u)(x) = (Au)(x) + \sum_{v \in U} a_v(t, x) (u(x))^v.$$

$$2) \quad F_1 : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$$

mit

$$(F_1(t, u))(x) = \sum_{v \in G} a_v(t, x) (u(x))^v.$$

$$3) \quad F_2 : \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$$

mit

$$(F_2(t, u))(x) = a_0(t, x).$$

Dann folgt (s. Beweis zu Satz 9.6)

$$[A(t)u, u] \leq \left\{ \beta + \mu_1 + \sum_{v \in I} \gamma_v \right\} \|u\|^2 \quad \text{für } \|u\| \leq 1.$$

Für $\|u\| \leq \rho \leq 1$ gilt:

$$[F_1(t, u), u] \leq \rho \left\{ \sum_v \gamma_v \right\} \|u\|^2$$

und

$$\|F_2(t, u)\| = \sup_{x \in [0, 1]} |a_0(t, x)| = \gamma(t).$$

Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3.6 erfüllt, und die Behauptung ist bewiesen. —

Genügt die Funktion $\gamma(t)$ nicht den Bedingungen von Satz 9.7, so läßt sich die Aussage über die Beschränktheit der Lösung aufrechterhalten, falls sich γ nach oben durch eine hinreichend kleine Konstante γ_0 abschätzen läßt. Dies zeigt der folgende Satz.

Satz 9.9

Die Funktionen a und c und die Konstanten α , $\tilde{\beta}$ und ρ mögen die Voraussetzungen von Satz 9.7 erfüllen. Ferner sei

$$\gamma(t) \leq \gamma_0$$

für $t \geq 0$. Dann gilt:

Ist $\gamma_0 \leq \rho |\alpha + \tilde{\beta}|$, so folgt aus $\|u_0\| < \gamma_0 |\alpha + \tilde{\beta}|^{-1}$ für

die zugehörige Lösung

$$\sup_{x \in [0,1]} |u(t,x)| < \gamma_0 |\alpha + \tilde{\beta}|^{-1}.$$

Der Beweis folgt sofort aus Satz 3.9.

Das Beispiel der verallgemeinerten Wärmeleitung wurde bereits von Pao [36] behandelt. Es wurde jedoch nur eine Aussage über die asymptotische Stabilität hergeleitet (vgl. Satz 1.6). Dabei waren die Voraussetzungen über die Polynomkoeffizienten wesentlich stärker. In der Arbeit werden jedoch keine Aussagen über Instabilität und Unbeschränktheit gemacht. Diesem Problem sind die folgenden Sätze gewidmet. Mit γ_v bezeichnen wir wieder die Konstanten, die die Koeffizienten $a_v(t,x)$ mit geradem Index nach oben beschränken.

Für ungerade v mögen Konstanten λ_v existieren, so daß für $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times [0,1]$ gilt:

$$a_v(t,x) \leq \lambda_v.$$

Dann gilt der folgende

Satz 9.10

Die Funktionen a und c mögen den Bedingungen i') und ii') von Lemma 9.4 genügen und es sei $\gamma(t) \equiv 0$. Dann ist die Ruhelage $u \equiv 0$ instabil, falls $\alpha + \lambda_1 > 0$ ist.

Beweis:

Bezeichne wieder mit F_0 die Abbildung von $\mathbb{R}_+ \times X$ in X mit

$$(F_0(t, u))(x) = f(t, x, u(x)).$$

Dann gilt (s. auch Beweis zu Satz 9.5)

$$[F_0(t, u), u] = \sum_{v=1}^N a_v(t, x_0) (u(x_0))^{v+1}$$

$$\geq \sum_{v \in U} \lambda_v \|u\|^{v+1} - \sum_{v \in G} \gamma_v \|u\|^{v+1}.$$

Definiere nun die Abbildung

$$L: \mathbb{R}_+ \ni y \rightarrow 2 \left(\alpha y + \sum_{v \in U} \lambda_v y^{\frac{v+1}{2}} - \sum_{v \in G} \gamma_v y^{\frac{v+1}{2}} \right).$$

Dann folgt mit Hilfe von Lemma 9.4:

$$2 [Au + F_0(t, u), u] \geq L(\|u\|^2).$$

Wegen $L(0) = 0$ und $L'(0) = 2(\alpha + \lambda_1) > 0$ ist $L(y) > 0$ für hinreichend kleine positive y . Damit ist die Instabilität nach Satz 2.19 bewiesen. —

Eine ähnliche Aussage läßt sich auch dann zeigen, wenn sich die zeitliche Abhängigkeit der Koeffizienten nicht vollständig unterdrücken läßt.

Satz 9.11

Sei $\gamma(t) \equiv 0$ und $\gamma_v = 0$ für $v \geq 2$. Die Funktionen a und c seien wie in Satz 9.10. Ferner sei $\lambda_v \geq 0$ für $v \geq 3$, und es existiere eine stetige Funktion k mit

$$a_1(t, x) \geq k(t)$$

für $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$. Weiterhin sei $\alpha > 0$, und es existiere eine Zahl $\sigma \in \mathbb{R}$, so daß für hinreichend große t die Abschätzung

$$-\alpha < \sigma \leq \frac{1}{t} \int_0^t k(s) \, ds$$

gilt.

Dann ist jede Lösung, die zu einer Anfangsfunktion $u_0 \neq 0$ gehört, unbeschränkt.

Beweis:

Setze $F_1(t, u) \equiv 0$ und definiere

$$F_2: \mathbb{R}_+ \times X \rightarrow X$$

durch

$$(F_2(t, u))(x) = \sum_{v=1}^N a_v(t, x) (u(x))^v.$$

Nach Voraussetzung ist $a_v(x, t) \equiv 0$ für gerades v , und es folgt (s. Beweis zu Satz 9.10)

$$[F_2(t, u), u] \geq \sum_{v=3}^N \lambda_v \|u\|^{v+1} + k(t) \|u\|^2 \geq k(t) \|u\|^2.$$

Nach Lemma 9.4 ist für $u \in D(A)$:

$$[Au, u] \geq \alpha \|u\|^2.$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Satz 3.10 mittels Lemma 3.11. —

Sind die zur Formulierung des Anfangswertproblems (9.0.1) benutzten Funktionen a , b und c auch von der Zeit t abhängig, so bleiben unter Umständen alle bewiesenen Aussagen weiter gültig. Setzen wir nämlich voraus, daß die Abschätzungen aus Lemma 9.3 und Lemma 9.4 unabhängig von t erfüllt sind, so ist die Zeitabhängigkeit der Funktionen a , b und c offenbar unerheblich.

Ähnlich zu (9.0.1) ist das folgende Anfangswertproblem (9.0.2):

$$u_t = c u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + d(t, x)$$

$$u(t, x) = u(t, x + 2\pi)$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Die gesuchte Funktion u und die Funktion d seien 2π -periodisch in x ; ferner sei $c > 0$. Dieses Problem tritt bei der Verbrennung von Treibstoffen auf (s. Ames [1]). Es ist bekannt, daß die Temperatur u sehr schnell ansteigt, und man interessiert sich für Zeitschranken, nach denen eine gewisse Temperatur erreicht ist. Eine solche Aussage können wir mit unseren Hilfsmitteln sehr leicht herleiten.

Satz 9.12

Sei d stetig und d_0 eine stetige Funktion mit

$$d(t, x) \geq d_0(t)$$

für $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Dann gilt für jede Lösung des Problems (9.0.2) die Abschätzung:

$$\min_{x \in \mathbb{R}} u(t, x) \geq \min_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) + \int_0^t d_0(s) \, ds.$$

Beweis:

Mit Hilfe der Substitution $v(t, x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2c} u(t, x) \right\}$

geht (9.0.2) in das Problem

$$v_t = c v_{xx} - \frac{1}{2c} d(t, x) v$$

$$v(t, x) = v(t, x + 2\pi)$$

$$v(0, x) = v_0(x) := \exp \left\{ -\frac{1}{2c} u_0(x) \right\}$$

über.

Sei X der Banachraum aller 2π -periodischen, stetigen Funktionen. Zu jeder Funktion $f \in X$ existiert ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$|f(x_0)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|.$$

Falls $f \in X \cap C^2(\mathbb{R})$ ist, gilt weiter:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) f(x_0) \leq 0.$$

Auf $X \cap C^2(\mathbb{R})$ definieren wir für $t \geq 0$ die Abbildungen

$$A(t): X \cap C^2(\mathbb{R}) \rightarrow X$$

durch

$$(A(t)v)(x) = c v''(x) - \frac{1}{2c} d(t, x) v(x).$$

Wie in $C[0,1]$ wird in X durch

$$[g, f] = g(x_0) f(x_0) \quad |f(x_0)| = \|f\|$$

ein Semi-Skalarprodukt definiert (vgl. Lemma 9.1). Dann folgt für $v \in X \cap C^2(\mathbb{R})$

$$[A(t)v, v] \leq -\frac{1}{2c} d_0(t) \|v\|^2.$$

Daraus ergibt sich nach Satz 1.9 für $t \geq 0$

$$\|v(t)\| \leq \|v_0\| \exp \left[-\frac{1}{2c} \int_0^t d_0(s) ds \right].$$

Wegen

$$\|v(t)\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x, t) = e^{-\frac{1}{2c} \min_{x \in \mathbb{R}} u(x, t)}$$

und

$$\|v_0\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} v_0(x) = \exp \left[-\frac{1}{2c} \min_{x \in \mathbb{R}} u_0(x) \right],$$

folgt wegen der Monotonie der Exponentialfunktion die Behauptung. —

Wir wollen nun an einem Beispiel zeigen, daß unsere Methode nicht auf Gleichungen mit einer räumlichen Variablen beschränkt ist. Dazu sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand ∂D . Weiter seien p_1, p_2, q und r Funktionen aus $C^1(D \cup \partial D)$. Die Abbildung r besitze keine Nullstelle in $D \cup \partial D$ und sei o.B.d.A. positiv. Dann existieren Konstanten r_0 und r_1 mit

$$0 < r_0 \leq r(x, y) \leq r_1$$

für alle $(x, y) \in D \cup \partial D$.

Wir untersuchen zunächst das folgende lineare Anfangs-Randwertproblem (9.0.3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r(x, y)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} - q(x, y) u \right]$$

$$u(t, x, y) = 0 \quad \text{für} \quad (x, y) \in \partial D \quad \text{und} \quad t \geq 0$$

$$u(0, x, y) = u_0(x, y).$$

Wir bezeichnen mit $\bar{D}$ die Menge $D \cup \partial D$ und führen den Vektorraum

$$X := \{ u \in C(\bar{D}) \mid u = 0 \text{ auf } \partial D \}$$

ein. Versehen mit $\|u\| := \sup \{ |u(x, y)| \mid (x, y) \in \bar{D} \}$ ist X ein Banachraum. Dann gilt:

Lemma 9.13

- a) Zu $f \in X$ existiert ein Punkt $(x_0, y_0) \in D$ mit
 $\|f\| = |f(x_0, y_0)|$.
- b) Ist f zusätzlich 2-mal stetig partiell differenzierbar (nach x und y), so ist
- $$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$
- und $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) \leq 0$
- und $f_{yy}(x_0, y_0) \cdot f(x_0, y_0) \leq 0$.

Beweis:

- a) Da f auf dem Rand von D verschwindet, existiert stets ein Punkt $(x_0, y_0) \in D$ mit $|f(x_0, y_0)| = \|f\|$.
- b) Da (x_0, y_0) innerer Punkt ist, existieren reelle Zahlen a und b mit

$$a < x_0 < b$$

und

$$\{(x, y_0) \mid a \leq x \leq b\} \subset D.$$

Wir definieren die Abbildung

$$\bar{f}: [a, b] \ni x \mapsto f(x, y_0) \in \mathbb{R};$$

dann ist $\bar{f} \in C^2[a, b]$ und

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [a, b]} |\bar{f}(x)| &= \sup_{x \in [a, b]} |f(x, y_0)| = |f(x_0, y_0)| \\ &= \|f\|. \end{aligned}$$

Da x_0 im Innern des Intervalls $[a, b]$, liegt und die Beziehungen

$$\bar{f}'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y_0) \quad \bar{f}''(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y_0)$$

gelten, folgt sofort:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) f(x_0, y_0) \leq 0.$$

Analog zeigt man die Behauptung für die partiellen Ableitungen nach y . —

Sei nun $D(A) := X \cap C^2(\bar{D})$ und definiere die Abbildung $A : D(A) \rightarrow X$ durch

$$(Au)(x, y) = \frac{1}{r(x, y)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right\} - q(x, y) u(x, y) \right].$$

Wie in Lemma 9.1 zeigt man, daß durch die Abbildung

$$X \times X \ni (g, f) \rightarrow [g, f] = g(x_0, y_0) f(x_0, y_0) \quad \text{mit}$$

$$|f(x_0, y_0)| = \|f\| \quad \text{ein Semi-Skalarprodukt definiert wird.}$$

Dann gilt:

Lemma 9.14

- i) Gilt $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ und $q \geq q_0 \geq 0$, so folgt für $u \in D(A)$:

$$[Au, u] \leq -\frac{q_0}{r_1} \|u\|^2.$$

ii) Gilt $p_1 \leq 0$, $p_2 \leq 0$ und $q \leq q_1 \leq 0$, so folgt für $u \in D(A)$:

$$[Au, u] \geq \frac{|q_1|}{r_0} \|u\|^2.$$

Beweis:

Nach Definition des Semi-Skalarproduktes gilt:

$$\begin{aligned} [Au, u] &= (Au)(x_0, y_0) u(x_0, y_0) \\ &= \frac{1}{r(x_0, y_0)} \left[p_1(x_0, y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_0, y_0) + p_2(x_0, y_0) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right. \\ &\quad \left. - q(x_0, y_0) u(x_0, y_0) \right] u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 9.13 und den Voraussetzungen über p_1 , p_2 und q folgt dann die Behauptung. —

Nun folgt der nächste Satz leicht:

Satz 9.15

1) Erfüllen p_1 , p_2 und q die Bedingungen von Lemma 9.14 i), so gilt für die Lösung von (9.0.3)

$$\sup_{(x,y) \in \bar{D}} |u(t, x, y)| \leq \sup_{(x,y) \in \bar{D}} |u_0(x, y)| \exp \left\{ -\frac{q_0}{r_1} t \right\},$$

d.h.: Insbesondere ist die Ruhelage $u \equiv 0$ asymptotisch stabil (global).

- 2) Erfüllen p_1 , p_2 und q die Bedingungen von Lemma 9.14 ii), so gilt für die Lösung von (9.0.3)

$$\sup_{(x,y) \in \bar{D}} |u(t,x,y)| \geq \sup_{(x,y) \in \bar{D}} |u_0(x,y)| \exp \left\{ \frac{|q_1|}{r_0} t \right\}.$$

Beweis:

- 1) Nach Lemma 9.14 gilt für $u \in D(A)$:

$$2 [Au, u] \leq - \frac{2q_0}{r_1} \|u\|^2,$$

und die Behauptung folgt nach Satz 1.9.

- 2) Ebenfalls nach Lemma 9.14 gilt für $u \in D(A)$:

$$2 [Au, u] \geq \frac{2|q_1|}{r_0} \|u\|^2.$$

Wendet man das Korollar 1.12 an, so erhält man die Behauptung. —

Dieses Ergebnis läßt sich selbstverständlich auch auf anderen Wegen, etwa durch Anwendung der Fourierschen Methode (vgl. Hochstadt [19] und Michlin [33]) erzielen. Jedoch ist der theoretische Aufwand wesentlich höher, da die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Operators A benötigt werden.

Es sei noch bemerkt, daß Probleme der Form (9.0.3) bei der Abkühlung von Stäben auftreten (Michlin [33]).

Weiterhin können wir durch einen Term der Art $f(t, x, y, u)$ die Differentialgleichung im Problem (9.0.3) stören. Es lassen sich dann analoge Überlegungen wie zum Problem (9.0.1) anstellen.

§ 10 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit in einem endlichen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ unter der Bedingung, daß die Flüssigkeit am Rande haftet, wird durch das folgende System beschrieben (10.0.1):

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mu \Delta \underline{u} + \underline{f}(t, \underline{x})$$

$$\underline{u}(t, \underline{x}) = 0 \quad \text{für} \quad \underline{x} \in \partial \Omega \quad \text{und} \quad t \geq 0.$$

Hierbei ist die Abbildung $\underline{u} : \mathbb{R}_+ \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ die Strömungsgeschwindigkeit, p der Druck, ρ die Dichte, $\mu \geq 0$ die Zähigkeit der Flüssigkeit und $\underline{f}$ irgendeine äußere Kraft. Zusätzlich genügt $\underline{u}$ der Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0.$$

Diese Bedingung hat jedoch auf unsere Überlegungen keinerlei Einfluß.

Die Navier-Stokes-Gleichungen spielen in der Anwendung eine große Rolle und werden vielfach behandelt. Aus der umfangreichen Literatur erwähnen wir das Buch von Ladyzhenskaya [26]. Einige neuere Arbeiten sind bei Carroll [5] zitiert.

Da sich der Druck p und die Strömungsgeschwindigkeit $\underline{u}$ gegenseitig beeinflussen, ist man an Abschätzungen interessiert, die qualitative Aussagen über diesen Zusammenhang gestatten. Im allgemeinen werden solche Abschätzungen mit Hilfe der L^2 -Norm gewonnen (vgl. Ladyzhenskaya [26]). Wir wollen dagegen eine Abschätzung für klassische Lösungen bezüglich der Maximumsnorm herleiten. Dazu benutzen wir den Banachraum $(X_1, \|\cdot\|)$ mit

$$X_1 := \{ u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in C(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

und

$$\|u\| := \sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} |u(\underline{x})|.$$

Denkt man sich die Strömung durch den Druckgradienten und die äußere Kraft $\underline{f}$ angetrieben, so erwartet man, daß die Maximalgeschwindigkeit im wesentlichen durch das Maximum der auftretenden Kräfte bestimmt ist. Ebenso wird man vermuten, daß die Geschwindigkeit zur Zeit t nicht nur von den momentanen Druckverhältnissen, sondern auch von der Vorgeschichte abhängt. Weiter zeigt die Abschätzung, daß die Geschwindigkeit in einer Richtung vor allem von den in diese Richtung wirkenden Kräften bestimmt wird.

Mit den Bezeichnungen $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$ und $\underline{u}_0 = (u_{0,1}, u_{0,2}, u_{0,3})$ gelten die folgenden Abschätzungen:

Satz 10.1

Ist $\underline{u}$ eine Lösung von (10.0.1) mit $\underline{u}(0, \underline{x}) = \underline{u}_0(\underline{x})$ und $u_v \in X_1 \cap C^2(\bar{\Omega})$ ($1 \leq v \leq 3$) so folgt für $t \geq 0$ und $1 \leq v \leq 3$:

$$\sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} |u_v(t, \underline{x})| \leq \sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} |u_{0,v}(\underline{x})| + \int_0^t \sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v}(s, \underline{x}) + f_v(s, \underline{x}) \right| ds.$$

Zum Beweis dieses Satzes benötigen wir einige Tatsachen, die sich größtenteils leicht aus § 9 ergeben.

Die Abbildung

$$X_1 \times X_1 \ni (v, u) \mapsto [v, u] = v(\underline{x}_0) u(\underline{x}_0) \quad \text{mit} \quad |u(\underline{x}_0)| = \|u\|$$

ist ein Semi-Skalarprodukt. Wegen der Bedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$

läßt sich stets $\underline{x}_0 \in \Omega$ wählen. Ist $u \in X_1 \cap C^2(\bar{\Omega})$,

so zeigt man analog zu Lemma 9.13:

$$\frac{\partial u}{\partial x_v}(\underline{x}_0) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_v^2}(\underline{x}_0) u(\underline{x}_0) \leq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq v \leq 3.$$

Sei nun $\underline{u}(t, \underline{x})$ eine Lösung von (10.0.1) mit

$\underline{u}_v(t, \cdot) \in X_1 \cap C^2(\bar{\Omega})$. Für $1 \leq v \leq 3$ definieren wir

die folgenden Abbildungen

$$A_v(t) : X \cap C^2(\bar{\Omega}) \rightarrow X$$

durch

$$(A_v(t) u)(\underline{x})$$

$$= -u(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_v}(\underline{x}) - \sum_{n \neq v} u_n(t, \underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n}(\underline{x})$$

$$+ \mu \left(\sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(\underline{x}) \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v}(t, \underline{x}) + f_v(t, \underline{x}).$$

Dann läßt sich das folgende Lemma beweisen.

Lemma 10.2

Für $1 \leq v \leq 3$, $u \in X_1 \cap C^2(\bar{\Omega})$ und $t \geq 0$ gilt:

$$[A_v(t)u, u] \leq \sup_{\underline{x} \in \Omega} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v}(t, \underline{x}) + f_v(t, \underline{x}) \right| \|u\|.$$

Beweis:

Da $u \in X_1 \cap C^2(\bar{\Omega})$ ist, folgt nach Definition des Semi-Skalarproduktes wegen $\mu \geq 0$:

$$[A_v(t)u, u] = (A_v(t)u)(\underline{x}_0) u(\underline{x}_0)$$

$$\leq \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v}(t, \underline{x}_0) + f_v(t, \underline{x}_0) \right) u(\underline{x}_0).$$

Da nach der Wahl des Punktes $\underline{x}_0 \in \Omega$ die Beziehung

$$u(\underline{x}_0) \leq |u(\underline{x}_0)| = \|u\|$$

gilt, folgt sofort die Behauptung. —

Im Anschluß an diese Vorbereitungen beweisen wir den

Satz 10.1:

Zerlegen wir das System (10.0.1) in seine einzelnen Komponenten, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_v}{\partial t} = & - \sum_{n=1}^3 u_n \frac{\partial u_v}{\partial x_n} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v} \\ & + \mu \sum_{n=1}^3 \frac{\partial^2 u_v}{\partial x_n^2} + f_v(t, \underline{x}) = (A_v(t) u_v(t))(\underline{x}) \end{aligned}$$

$$u_v(t, \underline{x}) = 0 \quad \text{für } \underline{x} \in \partial\Omega \quad \text{und } t \geq 0;$$

$$u_v(0, \underline{x}) = u_{0,v}(\underline{x}).$$

Nach Lemma 10.2 und Satz 1.9 folgt:

$$\|u_v(t)\|^2 = \sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} |u_v(\underline{x}, t)| \leq y(t)$$

wobei y der DGL

$$y' = 2 \sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v}(t, \underline{x}) + f_v(t, \underline{x}) \right| \sqrt{y}$$

und der Anfangsbedingung $y(0) = \|u_0\|^2 > 0$ genügt.

Wegen

$$y(t) = \left(\|u_{0,v}\| + \int_0^t \sup_{\underline{x} \in \bar{\Omega}} \left| \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_v}(s, \underline{x}) + f_v(s, \underline{x}) \right| ds \right)^2$$

ist damit die Behauptung bewiesen. —

§ 11 Die verallgemeinerte Wellengleichung

Wir behandeln ein gemischtes Anfangs-Randwertproblem für partielle Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0.$$

Mit Hilfe von stark stetigen Halbgruppen und Gruppen wurden in den Arbeiten von Buis, Eisen und Vogt ([4], [41]) Untersuchungen über das Stabilitätsverhalten der Ruhelage durchgeführt. Der Fall der eindimensionalen Wellengleichung wurde ausführlich von Reißig [38] behandelt. Die genannten Autoren beschäftigen sich unter anderem mit dem Problem der asymptotischen Stabilität im Fall $a > 0$. Wir werden zeigen, daß das Problem für $a < 0$ in einem geeigneten Sobolev-Raum keine beschränkte Lösung (außer $u \equiv 0$) besitzt. Die benötigten Hilfsmittel wollen wir nur kurz vorstellen und verweisen wegen der näheren Einzelheiten auf das Buch von Yoshida [44] und die oben angeführten Arbeiten.

Sei Ω_0 ein zusammenhängendes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ und L ein stark elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2p$ mit reellwertigen Koeffizienten $a_j \in C^\infty(\Omega_0)$. Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\bar{\Omega} \supset \Omega_0$.

Mit $H_0^p(\Omega)$ und $H^p(\Omega)$ bezeichnen wir die Sobolev-Räume, die mit den üblichen Normen versehen seien. Ferner benutzen wir für die Skalarprodukte in $H^p(\Omega)$ und $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ die Schreibweise:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_p \quad \text{und} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_0.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt dann für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ (Funktionen mit kompaktem Träger) die Garding'sche Ungleichung:

$$(11.0.1) \quad \langle Lu, u \rangle_0 + K \langle u, u \rangle_0 \geq k \langle u, u \rangle_p.$$

Sei $D(T)$ die Menge aller Funktionen $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, deren Normalableitung auf dem Rand bis zur Ordnung $p-1$ gleich Null sind, und definiere $T: D(T) \ni u \rightarrow Lu$.

Der Operator T besitzt bezüglich $L^2(\Omega)$ eine abgeschlossene Erweiterung W mit

$$D(W) = H_0^p(\Omega) \cap H^{2p}(\Omega).$$

Dieser genügt für $u \in D(W)$ ebenfalls der Ungleichung (11.0.1).

Das gemischte Anfangs-Randwertproblem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0$$

$$(11.0.2) \quad u(0, \underline{x}) = u_0(\underline{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, \underline{x}) = u_1(\underline{x})$$

u erfüllt für jedes $t \geq 0$ die Dirichlet-Randbedingung bis zur Ordnung $p-1$

läßt sich dann schreiben als

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + a \frac{du}{dt} + Wu = 0$$

$$(11.0.3) \quad u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt} = u_1$$

mit $u \in D(W)$.

Mit den Bezeichnungen $u = v_1$ und $\frac{du}{dt} = v_2$

und $\underline{v} = (v_1, v_2)$ können wir dann (11.0.3) als System von Gleichungen 1. Ordnung schreiben:

$$(11.0.4) \quad \frac{d\underline{v}}{dt} = A \underline{v} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -Wv_1 - av_2 \end{pmatrix}$$

mit $A : H_0^p(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow H_0^p(\Omega) \times L^2(\Omega)$ und

$$D(A) = H_0^p(\Omega) \cap H^{2p}(\Omega) \times H_0^p(\Omega)$$

$$\text{Rg}(A) = H_0^p(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Ferner benötigen wir die Tatsache, daß aus den Sobolev-
schen Einbettungssätzen die Existenz einer Konstanten
 $c \geq 1$ folgt, so daß für alle $v_1 \in D(W)$ gilt:

$$\|v_1\|_p^2 \geq c \|v_1\|_0^2.$$

Mit diesen Bezeichnungen kann der folgende Satz bewiesen
werden.

Satz 11.1

Der Differentialoperator L sei selbstadjungiert und es
existiere ein $\varepsilon > 0$ mit

$$k - c^{-1} K \geq \varepsilon;$$

dabei sind k und K die Konstanten aus (11.0.1). Dann
gilt:

Die Ruhelage $\underline{u} = 0$ von (10.0.3) ist

- a) asymptotisch stabil, falls $a > 0$,
- b) stabil, falls $a = 0$ ist.

Ist $a < 0$, so existiert außer $\underline{u} \equiv 0$ keine beschränkte
Lösung.

Beweis:

Wir beginnen, indem wir mit Hilfe von W die Abbildung

$$P : (v_1, v_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 2Wv_1 + a^2 v_1 + a v_2 \\ a v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$$

definieren.

P ist auf einer dichten Teilmenge von $H_0^P(\Omega) \times L^2(\Omega)$ erklärt und besitzt eine stetige, lineare Fortsetzung P , die den Hilbertraum $H_0^P(\Omega) \times L^2(\Omega)$ in sich abbildet. Ferner wird durch

$$\langle \underline{v}, P \underline{w} \rangle_0$$

ein äquivalentes Skalarprodukt in $H_0^P(\Omega) \times L_2(\Omega)$ definiert. Die von diesem Skalarprodukt erzeugte äquivalente Norm werde mit $\|\cdot\|_*$ bezeichnet. Dann gilt für $\underline{v} \in D(A)$:

$$(11.1.1) \quad \langle A \underline{v}, P \underline{v} \rangle_0 \leq -\alpha \|\underline{v}\|_*^2$$

mit $\alpha > 0$, falls $a > 0$. Ist $a = 0$, so ist für $\underline{v} \in D(A)$

$$\langle A \underline{v}, P \underline{v} \rangle = 0.$$

Die Behauptungen 1) und 2) folgen dann aus Satz 2.7.

Aus der Gleichung (11.1.1) ergibt sich für $\underline{v} \in D(A)$:

$$\langle -A \underline{v}, P \underline{v} \rangle \geq \alpha \|\underline{v}\|_*^2.$$

Nach Satz 3.10 besitzt dann das System

$$\frac{d\underline{v}}{dt} = -A \underline{v}$$

außer $\underline{v} \equiv 0$ keine beschränkte Lösung. Betrachten wir nun für $a > 0$ die Gleichung

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - a \frac{du}{dt} + W u = 0,$$

so ergibt sich durch die Substitution $v_1 = u$, $v_2 = -\frac{du}{dt}$
das System

$$\frac{dv}{dt} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ av_2 + wv_1 \end{pmatrix} = -A \underline{v}.$$

Somit existiert im Fall $a < 0$ keine beschränkte Lösung. —

Bemerkung:

Da wir uns nur für die qualitativen Aspekte interessiert haben, sind wir auf die Frage der Existenz von Lösungen nicht eingegangen. Es läßt sich aber beweisen, daß A eine negativ kontrahierende Halbgruppe erzeugt und somit Existenz und Eindeutigkeit gesichert ist.

Ein ausführlicher Beweis der Behauptungen 1) und 2) findet sich in den bereits erwähnten Arbeiten von Buis, Eisen und Vogt ([4], [41]).

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

- [1] AMES, W.F.: Nonlinear partial differential equations in engineering
Math.in Science and engineering,
Vol. 18, Academic Press,
New York-London 1965
- [2] BAKUSHINSKII, A.B.: Stabilization of solutions of
linear differential equations
in Hilbert space
Math. Notes 9, 1971, 239-242
- [3] BRAUER, F.: Nonlinear differential equations with forcing terms
Proc. Amer. Math. Soc. 15,
1964, 758-765
- [4] BUIS, G.R.: Ljapunov stability theory and
the stability of solutions to
partial differential equations
NASA CR-1100, part. I,
Washington, 1968
- [5] CARROLL, R.W.: Abstract methods in partial
differential equations
Harper and Row, New York -
Evanston - London, 1969
- [6] COPPEL, W.A.: On the stability of ordinary
differential equations
J. London Math. Soc. 39, 1964,
255-260

- [7] COPPEL, W.A.: Stability and asymptotic
behaviour of differential
equations
Heath and Co., Boston, 1965
- [8] DALECKII, Ju.L., Stability of solutions of dif-
KREIN, M.G.: ferential equations in Banach
space
Transl. of Math. Monographs,
Vol. 43, Amer. Math. Soc.,
Providence, 1974
- [9] DIEUDONNÉ, J.: Deux exemples singuliers
d'équations différentielles
Acta Sci. Math. 12, 1950, 38-40
- [10] DIEUDONNÉ, J.: Foundations of modern analysis
Academic Press, New York-London,
1969
- [11] DUNFORD, N., Linear operators, Part I
SCHWARTZ, J.T.: Interscience publishers, Inc.,
New York, 1958
- [12] ECKHAUS, W.: Studies in Non-Linear Stability
Theory
Springer Verlag, Berlin-Heidel-
berg-New York, 1965
- [13] FATTORINI, H.O.: Ordinary differential equations
in linear topological spaces I
J. of Diff. Equations 5, 1968,
72-105

- [14] FATTORINI, H.O.: Ordinary differential equations
in linear topological space II
J. of Diff. Equations 6, 1969,
50-70

- [15] FRIEDMAN, A.: Partial differential equations
Holt, Rinehart and Winston,
Inc., New York, 1969

- [16] GOLDSTEIN, J.A.: On a connection between first
and second order differential
equations in Banach spaces
J. Math. Appl. Anal. 30, 1970,
246-251

- [17] HAHN, W.: Stability of motion
Springer Verlag, Berlin-Heidel-
berg-New York, 1967

- [18] HILLE, E., Functional analysis and semi-
PHILLIPS, R.: groups
Amer. Math. Soc. Colloq. Pub.,
Vol. 31, 1957

- [19] HOCHSTADT, H.: Integral equations
J. Wiley and Sons, New York-
London-Sydney-Toronto, 1973

- [20] KATO, T.: Lectures C I M E, Varenna, 1963,
Cremonese

- [21] KATO, T.: Nonlinear Semigroups and evo-
lution equations
J. Math. Soc. Japan 19, 1967,
508-520

- [22] KNOBLOCH, H.W., Gewöhnliche Differentialgleichungen
KAPPEL, F.;
B.G. Teubner, Stuttgart, 1974

- [23] KRASOVSKII, N.N.: Stability of motion
Stanford Univ. Press, Stanford
California, 1963

- [24] KREIN, S.G.: Linear differential equations
in Banach spaces
Transl. Math. Monographs,
Vol. 29, Amer. Math. Soc.,
Providence, 1972

- [25] LADAS, G.E., Differential Equations in
LAKSHMIKANTHAM, V.: Abstract Spaces
Mathematics in Science and
Engineering, Vol 85, Academic
Press, New York-London, 1972

- [26] LADYZHENSKAYA, O.A.: The mathematical theory of
viscous incompressible flow
Gordon and Breach, New York-
London, 1963

- [27] LAKSHMIKANTHAM, V., Differential and Integral
LEELA, S.: Inequalities
Mathematics in Science and
Engineering, Vol. 55-I,
Academic Press, New York-
London, 1969

- [28] LAKSHMIKANTHAM, V., Differential and Integral
LEELA, S.: Inequalities
Mathematics in Science and
Engineering, Vol. 55-II,
Academic Press, New York-
London, 1969
- [29] LJAPUNOV, A.M.: Problème générale de la stabi-
lité du mouvement
Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse
(2), 9, 1907, 203-474
(Übersetzung einer in Comm.
Soc. math. Kharkow 1893 ver-
öffentlichten Arbeit)
- [30] LJAPUNOV, A.M.: Stability of motion
Academic Press, New York-London,
1966
(Englische Übersetzung von [29]
und weiteren Arbeiten)
- [31] LUMER, G., Dissipative operators in a
PHILLIPS, R.S.: Banach space
Pacific J. Math. 11, 1961,
679-698
- [32] MASSERA, J.L., Linear differential equations
SCHÄFFER, J.J.: and functional analysis I
Ann. of Math. (2), 67, 1958,
517-573
- [33] MICHLIN, S.G.: Vorlesungen über lineare Inte-
gralgleichungen
VEB Deutscher Verlag der Wissen-
schaften, Berlin, 1962

- [34] PAO, C.V.: The existence and stability of solutions of nonlinear operator differential equations
Arch. Rat. Mech. Anal. 35,
1969, 16-29
- [35] PAO, C.V.: Semigroups and asymptotic stability of nonlinear differential equations
SIAM J. Math. Anal. 3, 1972,
371-379
- [36] PAO, C.V.: On the asymptotic stability of differential equations in Banach spaces
Math. System Theory 7, 1973,
25-31
- [37] PAO, C.V.,
VOGT, W.G.: On the stability of nonlinear operator differential equations and applications
Arch. Rat. Mech. Anal. 35,
1969, 30-46
- [38] REISSIG, R.: Ljapunovs second method
Study 6, Stability, Solid Mech.
Div. Univ. Waterloo, 1972,
281-320
- [39] REISSIG, R.,
SANSONE, G.,
CONTI, R.: Nonlinear differential equations of higher order
Noordhoff Intern. Publishing,
Leyden, 1974

- [40] VAINBERG, M.M.: Variational methods for the study of nonlinear operators
Holden-Day, Inc., San Francisco-London-Amsterdam, 1964
- [41] VOGT, W.G., Semigroups, groups and Ljapunov stability of partial differential equations
BUIIS, G.R., University of Pittsburgh, Department of Electrical Engineering, Pittsburgh, 1970
EISEN, M.M.:
- [42] WALTER, W. Differential- und Integralgleichungen
Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 1964
- [43] WALTER, W., A differential inequality for the distance function in normed linear spaces
REDHEFFER, R.: Math. Ann. 211, 1974, 299-314
- [44] YOSHIDA, K.: Functional analysis
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1968
- [45] ZUBOV, V.I.: Methods of A.M. Ljapunov and their applications
Leningrad 1957 (russisch),
übersetzt: Noordhoff-Verlag, Groningen, 1964

L E B E N S L A U F

Am 29. November 1948 wurde ich, Wolfgang Hahn, als Sohn des Malermeisters Emil Hahn und seiner Ehefrau Brunhilde, geb. Wolf, in Duisburg geboren. Nach dem Besuch der Volksschule war ich von 1959 an Schüler des Max Planck-Gymnasiums in Duisburg-Meiderich. Dort legte ich im Juli 1967 die Reifeprüfung ab.

Vom Wintersemester 1967/68 an studierte ich Mathematik und Wirtschaftswissenschaften an der Ruhr-Universität Bochum, wo ich im November 1971 die Diplomprüfung bestand. Anschließend war ich zunächst als wissenschaftliche Hilfskraft, dann als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle und schließlich seit Februar 1973 als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mathematik der Ruhr-Universität tätig. In dieser Zeit entstand unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. R. Reißig die vorliegende Dissertation.

Meine akademische Ausbildung verdanke ich den Herren Professoren H. Ehlich, W. Haußmann, A. Jäger, H. Kellerer, K. Kirchgäßner, N. Kuhlmann, W. Niethammer, H. Reichardt, R. Reißig, W. Schempp, F. Sommer und H. Zieschang.

Bamberger Fotodruck *Schadel & Wehle*
GmbH & Co. KG.
86 Bamberg • Hohe-Kreuz-Str. 9b • Telefon 0951/21617